

**METAS CURRICULARES DO ENSINO BÁSICO – MATEMÁTICA**

**Caderno de Apoio**  
**2.º Ciclo**

**António Bivar, Carlos Grosso, Filipe Oliveira, Maria Clementina Timóteo**

## INTRODUÇÃO

Este Caderno de Apoio, organizado por ciclos de escolaridade, constitui um complemento ao documento *Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*. Na elaboração das Metas Curriculares utilizou-se um formato preciso e sucinto, não tendo sido incluídos exemplos ilustrativos dos descritores. Neste documento apresentam-se várias sugestões de exercícios, problemas e atividades, alguns com propostas de resolução, esclarecimentos relativos a algumas opções tomadas no documento principal e informações complementares para os professores.

Procurou-se realçar os descritores que se relacionam com conteúdos e capacidades atualmente menos trabalhados no Ensino Básico embora se tenham incluído também outros de modo a dar uma coerência global às abordagens propostas. Estas escolhas não significam, porém, que se considerem menos relevantes os descritores não contemplados.

Longe de se tratar de uma lista de tarefas a cumprir, as atividades propostas têm um caráter indicativo, podendo os professores optar por alternativas que conduzam igualmente ao cumprimento dos objetivos específicos estabelecidos nas metas.

Aos exemplos apresentados estão associados três níveis de desempenho. Os que não se encontram assinalados com asteriscos correspondem a um nível de desempenho regular, identificando-se com um ou dois asteriscos os exemplos que correspondem a níveis de desempenho progressivamente mais avançados.

Para além das sugestões de exercícios e problemas a propor aos alunos entendeu-se incluir também textos de apoio para os professores. Destinam-se a esclarecer questões de índole científica que fundamentam os conteúdos destes níveis de escolaridade e que poderão ajudar à seleção das metodologias mais adequadas à lecionação. Tanto no 2.º como no 3.º ciclo, relativamente ao domínio Geometria e Medida, reuniram-se estes textos num anexo designado por Texto Complementar de Geometria.

Nas Metas Curriculares, no domínio da Geometria e Medida, foi privilegiada uma notação tradicional do Ensino Básico e Secundário português e que os alunos devem conhecer. Contudo, poderão ser utilizadas outras notações em alternativa, desde que devidamente clarificadas e coerentes.

Descritor	Texto de apoio
1.1 1.2 1.3 1.4 1.5	<p>Estes descritores fazem a ponte entre a iniciação ao estudo das frações no 1.º ciclo e o complemento deste estudo no 2.º ciclo. Retoma-se de forma sistemática e geral o que já se tinha praticado a propósito dos descritores NO3-11.9 a NO3-11.15, NO3-12.5, NO3-12.6, NO4-4.1 e NO4-4.2. No exemplo abaixo, os alunos devem ser capazes de utilizar os conhecimentos adquiridos no 1.º ciclo e agora revistos para justificar os passos que os podem conduzir às respostas às diversas alíneas, utilizando, em particular, a sugestão do descritor 1.2 para reduzir duas frações ao mesmo denominador.</p> <p><b>Exemplo</b></p> <p><i>a. Indica duas frações com o mesmo denominador respetivamente equivalentes a <math>\frac{4}{9}</math> e <math>\frac{3}{7}</math>.</i></p> <p><i>b. Ordena as frações <math>\frac{4}{9}</math> e <math>\frac{3}{7}</math>.</i></p> <p><i>c. Calcula <math>\frac{4}{9} + \frac{3}{7}</math>.</i></p> <p><i>d. Calcula <math>\frac{4}{9} - \frac{3}{7}</math>.</i></p>
1.6	<p>No primeiro ciclo introduziu-se o produto de um número racional por um número natural (NO4-5.1;5.2) e o produto de um número racional por uma fração unitária (NO4-5.5;5.6).</p> <p>Pretende-se aqui definir o produto de dois quaisquer números racionais.</p> <p>A definição apresentada consiste em identificar o produto <math>\frac{c}{a} \times q</math> como o produto de <math>c</math> por <math>\frac{1}{a} \times q</math>, que pode ser explicitado utilizando os conteúdos previamente estudados.</p> <p>Os alunos poderão, por exemplo, calcular</p> $\frac{3}{7} \times \frac{2}{9} = 3 \times \frac{1}{7} \times \frac{2}{9} = 3 \times \frac{2}{7 \times 9} = \frac{3 \times 2}{7 \times 9}$ <p>e assim reconhecer a regra usual que permite determinar o produto de duas frações.</p>
1.7	<p>Este descritor pode ser trabalhado em simultâneo com os descritores ALG5-1.5 e ALG5-1.6.</p> <p>Recordando a definição geral de quociente entre dois números racionais (NO4-5.3), o quociente <math>\frac{a}{b} : \frac{c}{d}</math> é o número racional cujo produto por <math>\frac{c}{d}</math> é igual a <math>\frac{a}{b}</math>.</p> <p>Assim, por exemplo, a propósito do quociente entre <math>\frac{3}{7}</math> e <math>\frac{2}{9}</math>, os alunos poderão observar que</p> $\frac{2}{9} \times \frac{3 \times 9}{7 \times 2} = \frac{2 \times 3 \times 9}{9 \times 7 \times 2} = \frac{3}{7}$ <p>para reconhecer que</p> $\frac{3}{7} : \frac{2}{9} = \frac{3 \times 9}{7 \times 2} = \frac{3}{7} \times \frac{9}{2}.$

<p>1.10</p>	<p>A representação em numeral misto facilita o posicionamento de um dado número racional na reta numérica. Há que ter, no entanto, alguma cautela na sua utilização, uma vez que se pode confundir facilmente o significado aditivo da justaposição entre parte inteira e fracionária com um significado multiplicativo.</p> <p>Para adicionar (respetivamente subtrair) dois números racionais representados por numerais mistos, podem adicionar-se (respetivamente subtrair-se) separadamente as partes inteira e fracionária, com eventual transporte de uma unidade.</p> <p><b>Exemplo</b>  <i>Calcula <math>9\frac{2}{3} + 5\frac{1}{2}</math>.</i></p> <p>R.:</p> $9\frac{2}{3} + 5\frac{1}{2} = 9\frac{4}{6} + 5\frac{3}{6} = 14\frac{7}{6} = 15\frac{1}{6}.$ <p>Deverá chamar-se a atenção do aluno para o facto de <math>14\frac{7}{6}</math> não ser uma representação adequada em numeral misto de um número racional, sendo apenas utilizada esta notação no cálculo intermédio por conveniência.</p> <p><b>Exemplo</b>  <i>Calcula <math>10\frac{1}{3} - 5\frac{1}{2}</math>.</i></p> <p>R.: Como <math>\frac{1}{3} &lt; \frac{1}{2}</math>, é conveniente efetuar o transporte de uma unidade.</p> $10\frac{1}{3} - 5\frac{1}{2} = 9\frac{4}{3} - 5\frac{1}{2} = (9 - 5) + \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right) = 4\frac{5}{6}.$
<p>3.1</p>	<p>Existem dois critérios de divisibilidade por 4 que podem ser explorados:</p> <p><b>Critério 1:</b> Um número <math>N</math> é divisível por 4 se e apenas se o número formado pelos dois últimos algarismos de <math>N</math> for divisível por 4.</p> <p><b>Critério 2:</b> Um número <math>N</math> é divisível por 4 se e apenas se o dobro do valor do algarismo das dezenas adicionado ao valor do algarismo das unidades for divisível por 4.</p> <p><b>Exemplo</b>  <i>Os números 135564 e 245662 são divisíveis por 4?</i></p> <p>Pelo primeiro critério:  64 é divisível por 4, logo 135564 é divisível por 4.  62 não é divisível por 4, logo 245662 não é divisível por 4.</p> <p>Pelo segundo critério:  O número <math>2 \times 6 + 4 = 16</math> é divisível por 4, logo 135564 é divisível por 4.  O número <math>2 \times 6 + 2 = 14</math> não é divisível por 4, logo 245662 não é divisível por 4.</p>

**Informação Complementar para o Professor**  
Justificação dos critérios de divisibilidade por 4 e 9

1. Escrevendo um número natural  $N$  na forma  $N = 100 \times a + b$ , onde  $b$  é o número formado pelos dois últimos algarismos de  $N$ , e atendendo ao facto de 100 ser múltiplo de 4, facilmente se conclui que  **$N$  é divisível por 4 se e somente se  $b$  é divisível por 4**. De facto:

- Se  $b$  é múltiplo de 4,  $N$  é múltiplo de 4 por ser a soma de dois múltiplos de 4.
- Inversamente, se  $N$  é múltiplo de 4,  $b$  é múltiplo de 4 por ser a diferença de dois múltiplos de 4.

2. Pode completar-se um pouco este critério. Efetuando a decomposição decimal de  $b$ :

$$b = 10b_1 + b_0 = (4 \times 2 + 2) \times b_1 + b_0 = (4 \times 2) \times b_1 + (2b_1 + b_0).$$

Deduz-se, por um método análogo ao do ponto anterior, que  **$b$ , e portanto  $N$ , é divisível por 4 se e somente se  $2b_1 + b_0$  for divisível por 4**.

Um raciocínio análogo permite demonstrar os restantes critérios de divisibilidade. A título de exemplo, apresenta-se ainda a justificação geral do critério de divisibilidade por 9 acompanhada sistematicamente de uma ilustração.

Consideremos um número natural  $N = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1$  composto pelos  $n$  algarismos  $a_j$  na respetiva representação decimal:

$$N = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 = a_n \times 10^{n-1} + \dots + a_3 \times 10^2 + a_2 \times 10^1 + a_1.$$

*Ilustração:*

$$N = 5637 = 5 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 7$$

Observando que  $10^1 = 1 \times 9 + 1$ ,  $10^2 = 11 \times 9 + 1$ ,  $10^3 = 111 \times 9 + 1$ , ..., e que  $10^{n-1} = \underbrace{111 \dots 11}_n \times 9 + 1$ , vem:

( $n - 1$  algarismos iguais a 1)

$$N = a_n \times (111 \dots 11 \times 9 + 1) + \dots + a_3 \times (11 \times 9 + 1) + a_2 \times (1 \times 9 + 1) + a_1 = (a_n \times 111 \dots 11 + \dots + a_3 \times 11 + a_2 \times 1) \times 9 + (a_n + \dots + a_3 + a_2 + a_1).$$

*Ilustração:*

$$5637 = 5 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 7 = 5 \times (111 \times 9 + 1) + 6 \times (11 \times 9 + 1) + 3 \times (1 \times 9 + 1) + 7 = (5 \times 111 + 6 \times 11 + 3 \times 1) \times 9 + (5 + 6 + 3 + 7).$$

Observando que  $(a_n \times 111 \dots 11 + \dots + a_3 \times 11 + a_2 \times 1) \times 9$  é um múltiplo de 9,  **$N$  é divisível por 9 se e apenas se  $a_n + \dots + a_3 + a_2 + a_1$  for divisível por 9**.

*Ilustração:*

Como  $(5 \times 111 + 6 \times 11 + 3 \times 1) \times 9$  é divisível por 9, o número 5637 é divisível por 9 se e apenas se  $5 + 6 + 3 + 7 = 21$  for divisível por 9. Neste caso, 21 não é divisível por 9 logo 5637 também não é.

3.4

Utilizando os descritores ALG5-1.1 e ALG5-1.2 relativos às operações sobre os racionais e às respetivas propriedades, os alunos poderão reconhecer a propriedade mencionada em exemplos concretos.

**Exemplo**

*Sabendo que  $112 = 7 \times 16$  e que  $245 = 7 \times 35$ , podemos afirmar, sem calcular a diferença, que  $245 - 112$  é divisível por 7?*

R.: Sim, porque  $245 - 112 = 7 \times 35 - 7 \times 16 = 7 \times (35 - 16) = 7 \times 19$ , pelo que  $245 - 112$  é divisível por 7.

3.5

**Exemplo\***

Utiliza o divisor e o resto da divisão inteira de 413 por 70 para concluir que 413 (o dividendo) é divisível por 7.

R.: A divisão inteira de 413 por 70

$$\begin{array}{r} 413 \quad | \quad 70 \\ 63 \quad 5 \end{array}$$

permite-nos afirmar que  $413 = 70 \times 5 + 63$ .

7 divide 63 ( $9 \times 7 = 63$ ). Por outro lado, 7 divide 70, logo divide  $70 \times 5$ .

Se 7 divide  $70 \times 5$  e divide 63, então 7 divide a soma  $70 \times 5 + 63 = 413$ .

O aluno poderá também responder sem utilizar explicitamente os dois descritores anteriores:

$$413 = 70 \times 5 + 63 = 7 \times 10 \times 5 + 7 \times 9 = 7 \times (50 + 9) = 7 \times 59$$

logo 7 divide 413.

3.6

**Exemplo**

Considera os números 543168 e 99148.

- Justifica que os números dados são divisíveis por 4.
- \* Justifica, sem efetuares a divisão, que o resto da divisão inteira de 543168 por 99148 é divisível por 4.
- Efetua a divisão inteira de 543168 por 99148 e confirma o resultado da alínea anterior.

R.:

a.  $6 \times 2 + 8 = 20$  e 20 é divisível por 4, logo 543168 é divisível por 4.

$4 \times 2 + 8 = 16$  e 16 é divisível por 4, logo 99148 é divisível por 4.

b. Sendo respetivamente  $q$  e  $r$  o quociente e o resto da divisão de 543168 por 99148, temos que  $543168 = q \times 99148 + r$ , pelo que, por definição de diferença,

$$r = 543168 - q \times 99148.$$

Como cada um destes dois termos da subtração é divisível por 4,  $r$  é divisível por 4 (utilizámos em particular os resultados expressos em 3.3 e 3.4).

c.

$$\begin{array}{r} 54'3168 \quad | \quad 99148 \\ 4 \quad 7428 \quad 5 \end{array}$$

Tem-se  $r = 47428$ . Como 28 é divisível por 4,  $r$  é divisível por 4.

Os resultados expressos neste descritor e no anterior permitem concluir que, dada uma divisão inteira,

$$\begin{array}{r} D \quad | \quad d \\ r \quad q \end{array}$$

se um número for divisor de  $d$  e de um dos dois números  $D$  ou  $r$  então é divisor de ambos; portanto os divisores comuns a  $d$  e  $D$  são os mesmos que os divisores comuns a  $d$  e  $r$ .

3.7

O algoritmo de Euclides, apresentado no Livro VII dos *Elementos* (Euclides, cerca de 300 a.C.), é habitualmente considerado como o primeiro algoritmo da história da Matemática. Trata-se de um método simples e extremamente eficaz para a determinação do máximo divisor comum de dois números naturais. Por utilizar apenas a divisão inteira, constitui um método particularmente adaptado aos alunos do 5.º ano de escolaridade.

#### Descrição do algoritmo

Pretendemos, por exemplo, calcular o máximo divisor comum de 70 e 42.

Começamos por fazer a divisão inteira de 70 por 42.

$$\begin{array}{r} 70 \quad | \quad 42 \\ 28 \quad | \quad 1 \end{array}$$

Os divisores comuns a 42 e 70 são os mesmos que os divisores comuns a 42 e 28.

De facto, se um número divide 42 e 28 (o divisor e o resto), divide também o dividendo (70), de acordo com 3.5.

Inversamente, se um número divide 42 e 70 (o divisor e o dividendo), divide também o resto (28), de acordo com 3.6.

Repetindo o processo, efetuamos a divisão inteira do divisor pelo resto:

$$\begin{array}{r} 42 \quad | \quad 28 \\ 14 \quad | \quad 1 \end{array}$$

Pelo mesmo raciocínio, os divisores comuns a 28 e 42 são os mesmos que os divisores comuns a 28 e 14.

Voltamos a dividir o divisor pelo resto,

$$\begin{array}{r} 28 \quad | \quad 14 \\ 00 \quad | \quad 2 \end{array}$$

$$28 = 2 \times 14 + 0 = 2 \times 14.$$

Uma vez que obtivemos resto 0, o processo está terminado: os divisores comuns a 28 e 14 são os divisores de 14 (já que 14 é divisor de 28 – cf. 3.3), ou seja, 1, 2, 7 e 14.

É, portanto, esta a lista dos divisores comuns a 70 e 42, pelo que

$$m. d. c. (70, 42) = 14.$$

É essencialmente pedido que o aluno consiga aplicar este algoritmo na determinação do máximo divisor comum de dois números naturais, como no exemplo que se segue.

**Exemplo**

Calcula o máximo divisor comum de 42 e 30.

R.:

$$\begin{array}{r} 42 \overline{) 30} \\ 12 \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 30 \overline{) 12} \\ 06 \quad 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \overline{) 6} \\ 0 \quad 2 \end{array}$$

pelo que o *m. d. c.* (42, 30) = 6.

**Exemplo\***

Observa a divisão inteira:

$$\begin{array}{r} 294 \overline{) 18} \\ 6 \quad 16 \end{array}$$

Explica como podes concluir que os divisores comuns a 18 e 294 são os divisores comuns a 18 e 6.

R.:

Sabemos que se um número é divisor de 18 e 294 (respetivamente divisor e dividendo da divisão inteira apresentada) então é divisível pelo resto (6); portanto os divisores comuns a 18 e 294 são todos divisores comuns a 18 e 6. Por outro lado também sabemos que se um número é divisor de 18 e 6 (respetivamente divisor e resto da divisão inteira apresentada) então é divisível pelo dividendo (294); portanto os divisores comuns a 18 e 6 são todos divisores comuns a 18 e 294.

Concluimos assim que os divisores comuns a 18 e 294 são os divisores comuns a 18 e 6.

3.9

Os alunos podem verificar esta propriedade em exemplos concretos. Podem, por exemplo, observar que, dividindo os termos da fração  $\frac{70}{42}$  por *m. d. c.* (70,42) = 14, obtêm a fração equivalente  $\frac{5}{3}$  e que 3 e 5 são primos entre si.

**Exemplo**

Calcula o máximo divisor comum de 105 e 84 e obtém uma fração equivalente a  $\frac{105}{84}$  cujos termos sejam primos entre si.

$$105 = 1 \times 84 + 21, 84 = 4 \times 21 + 0, \text{ pelo que } m. d. c. (105,84) = 21.$$

$$105:21 = 5, 84:21 = 4, \text{ pelo que } \frac{105}{84} = \frac{5}{4}.$$

Os termos da fração  $\frac{105}{84}$  já foram divididos pelo máximo divisor comum, pelo que a fração obtida não pode ser novamente simplificada, ou seja, é irredutível.



### Informação Complementar para o Professor

Justificação deste resultado

Dados dois números naturais  $a$  e  $b$ , consideremos o máximo divisor comum  $d = m.d.c.(a, b)$ . Em particular trata-se de um divisor comum, pelo que existem números naturais  $a'$  e  $b'$  tais que

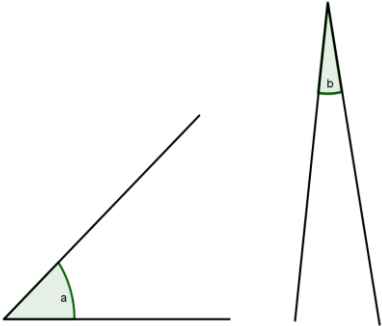
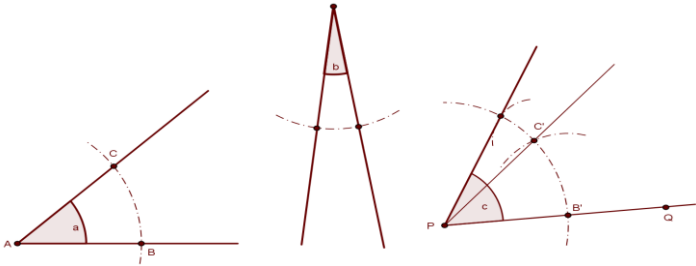
$$a = da' \text{ e } b = db'.$$

Trata-se pois de justificar que  $a'$  e  $b'$  são primos entre si. Se não fosse o caso, existiria um divisor  $d' > 1$  comum a estes números:  $a' = d'x$  e  $b' = d'y$  (onde  $x$  e  $y$  são números naturais).

Ter-se-ia pois

$$a = dd'x \text{ e } b = dd'y.$$

Desta forma,  $a$  e  $b$  seriam ambos divisíveis por  $dd' > d$ , o que é absurdo dado que  $d$  é por definição maior do que qualquer outro divisor comum.

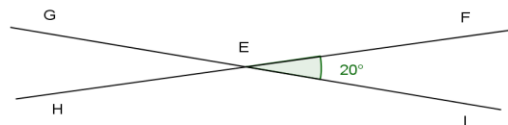
Descritor	Texto de apoio
<p>1.1 1.3</p>	<p>O critério de igualdade geométrica de ângulos introduzido em GM4-2.11 pode ser utilizado para transportar ângulos utilizando apenas régua e compasso. Os alunos poderão realizar alguns transportes de ângulos por esse processo antes de aplicarem esse método à obtenção de somas de ângulos (cf. o Texto Complementar de Geometria).</p> <p><b>Exemplo</b>  <i>Considera os ângulos <math>a</math> e <math>b</math> representados na figura. Traça um segmento de reta <math>[PQ]</math> no teu caderno e constrói, utilizando régua e compasso, um ângulo com um dos lados coincidente com a semirreta <math>\dot{P}Q</math> e que seja igual à soma de <math>a</math> e <math>b</math>.</i></p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>R.: Depois de se traçar um segmento <math>[PQ]</math> como na figura abaixo, uma solução possível é o ângulo <math>c</math> obtido da seguinte forma:</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>Com centro em <math>A</math> (vértice do ângulo <math>a</math>) traça-se um arco de circunferência que interseca os lados do ângulo em dois pontos que foram designados por <math>B</math> e <math>C</math>. Com a mesma abertura de compasso mas com centro em <math>P</math>, traça-se um arco de circunferência que interseca a semirreta <math>\dot{P}Q</math> no ponto <math>B'</math>, tendo-se então que <math>\overline{AB} = \overline{PB'}</math>. Para transportar o comprimento de <math>[BC]</math>, utiliza-se de novo o compasso. Com centro em <math>B'</math> e raio <math>\overline{BC}</math>, traça-se um arco de circunferência; a interseção <math>C'</math> deste arco com o já construído de centro em <math>P</math> (ambos traçados de forma a que se intersetem no semiplano que se escolhe para posicionar o ângulo) determina com <math>P</math> e <math>Q</math> um ângulo <math>QPC'</math>, que é igual ao ângulo <math>a</math>, atendendo ao critério de igualdade de ângulos acima referido. Para transportar o ângulo <math>b</math>, basta utilizar-se um processo idêntico, como se sugere na figura.</p> <p>Para somas de ângulos envolvendo ângulos côncavos, veja-se o Texto Complementar de Geometria.</p>

1.7

Neste descritor pretende-se que os alunos reconheçam a propriedade, ou seja, que a justifiquem.

**Exemplo**

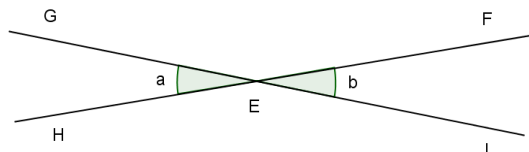
Na figura estão representadas duas retas  $GI$  e  $HF$  que se intersectam no ponto  $E$ . Sabe-se que  $\widehat{F\hat{E}I} = 20^\circ$ .



- a. Indica justificando o valor de  $\widehat{F\hat{E}G}$ .
- b. Deduz da alínea anterior o valor de  $\widehat{G\hat{E}H}$ .

**Exemplo\***

Na figura estão representadas duas retas  $GI$  e  $HF$  que se intersectam no ponto  $E$ .



Justifica que os ângulos  $a$  e  $b$  são iguais.

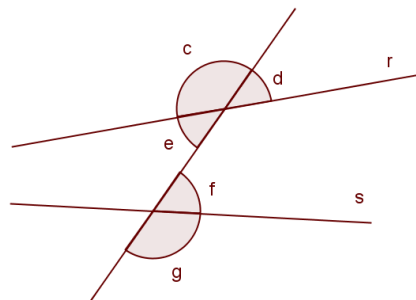
R.: Como os pontos  $G, E$  e  $I$  estão alinhados por esta ordem, os ângulos  $IEF$  e  $FEG$  são suplementares, bem como, analogamente, os ângulos  $FEG$  e  $GEH$ . Desta forma, os ângulos  $a$  e  $b$  são suplementares do mesmo ângulo, logo são iguais.

1.11  
1.13

No descritor 1.11 generaliza-se um critério de paralelismo que no 1.º ciclo se baseava na utilização de retas perpendiculares, ou seja, ângulos retos (cf. o texto de apoio ao descritor GM4-3.2); podemos agora utilizar ângulos correspondentes iguais com qualquer amplitude (cf. também o Texto Complementar de Geometria). Introduzem-se depois designações associadas a pares de ângulos determinados por uma secante em duas retas complanares e estudam-se os casos de igualdades de ângulos assim determinados.

**Exemplo**

Na figura estão representadas duas retas  $r$  e  $s$  num plano intersectadas por uma secante.

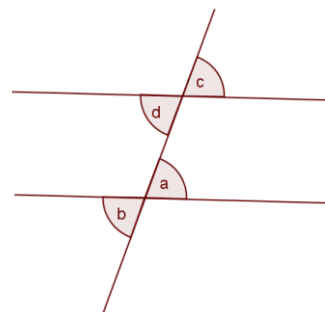


Indica dois ângulos que sejam:

- a. correspondentes;
- b. alternos internos;
- c. alternos externos.
- d. Se as retas  $r$  e  $s$  se intersectarem, como a figura sugere (embora o ponto de interseção não faça parte da figura), os ângulos  $d$  e  $f$  poderão ser iguais? Porquê?

**Exemplo**

Considera a figura onde está representado um par de retas paralelas intersectadas por uma secante.



- a. Justifica que:
  - $a_1$ . os ângulos  $a$  e  $c$  são iguais;
  - $a_2$ . os ângulos  $a$  e  $b$  são iguais, bem como os ângulos  $c$  e  $d$ ;

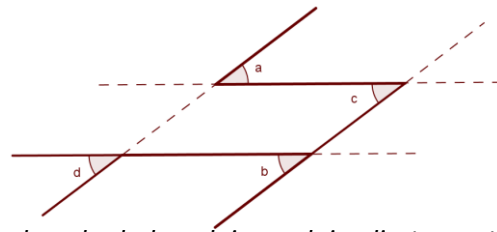
$a_3$ . os ângulos  $b$  e  $c$  são iguais;  
 $a_4$ . os ângulos  $a$  e  $d$  são iguais.  
**b.** Conclui que os ângulos alternos internos e alternos externos são iguais.

R.:  $a_1$ . Os ângulos  $a$  e  $c$  são iguais porque são correspondentes, determinados por uma secante em duas retas paralelas.  
 $a_2$ . Os ângulos  $a$  e  $b$  são iguais porque são verticalmente opostos, assim como os ângulos  $c$  e  $d$ .  
 $a_3$ . Os ângulos  $b$  e  $c$  são iguais porque, pelas alíneas anteriores, são ambos iguais a  $a$ .  
 $a_4$ . Os ângulos  $a$  e  $d$  são iguais porque  $a$  é igual a  $c$  (pela alínea  $a_1$ ) e  $c$  é igual a  $d$  (pela alínea  $a_2$ )  
**b.** Nas duas alíneas anteriores mostrou-se que eram iguais dois pares de ângulos respetivamente alternos internos e alternos externos na situação mais geral em que tais ângulos ficam definidos, quando duas retas paralelas são intersecadas por uma secante.

1.14

**Exemplo**

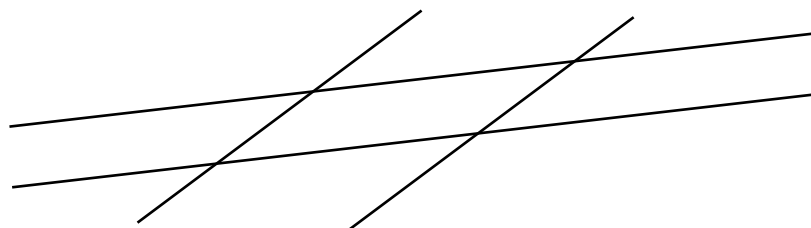
Na figura junta estão representados dois pares de retas paralelas e quatro ângulos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ .



- Justifica que  $a$  é igual a  $c$ .
- Justifica que  $b$  é igual a  $c$  e que  $b$  é igual a  $d$ .
- Identifica nesta figura dois ângulos de lados dois a dois diretamente paralelos mas não colineares e justifica porque é que são iguais.
- Identifica nesta figura dois ângulos de lados dois a dois inversamente paralelos mas não colineares e justifica porque é que são iguais.

**Exemplo\***

Representa num plano duas retas que se intersecam mas não são perpendiculares e, para cada uma delas, uma reta que lhe seja paralela nesse mesmo plano. Escolhe um dos ângulos convexos por elas determinado e designa-o por  $a$ .



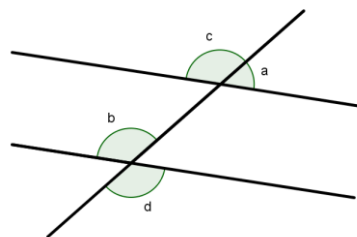
- Identifica todos os ângulos representados nessa figura que são iguais a  $a$  e justifica cada uma das igualdades.
- Seleciona todos os ângulos representados nessa figura que têm com o ângulo  $a$  lados diretamente paralelos dois a dois.
- Seleciona todos os ângulos representados nessa figura que têm com o ângulo  $a$  lados inversamente paralelos dois a dois.
- Verifica que todos os ângulos selecionados na alínea b. ou na alínea c. foram identificados na alínea a.

1.15

**Exemplo**

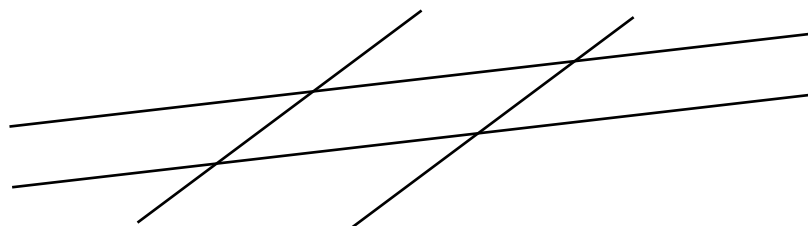
Na figura junta está representado um par de retas paralelas intersectado por uma secante e assinalados quatro ângulos  $a, b, c$  e  $d$ .

- a. Justifica que  $b$  é igual a  $c$ .
- b. Justifica que  $a$  e  $b$  são suplementares.



**Exemplo\***

Representa num plano duas retas que se intersectam mas não são perpendiculares e, para cada uma delas, uma reta que lhe seja paralela nesse mesmo plano. Escolhe um dos ângulos convexos por elas determinado e designa-o por  $a$ .



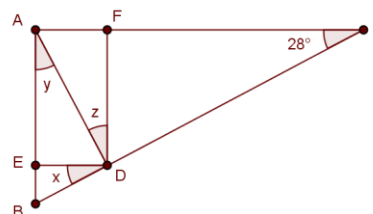
- a. Identifica, justificando, todos os ângulos representados nessa figura que são suplementares a  $a$ .
- b. Compara os lados dos ângulos que identificaste na alínea anterior com os lados do ângulo  $a$  verificando em cada caso se são diretamente ou inversamente paralelos. O que concluis?
- c. Para além dos ângulos identificados na alínea a. consegues encontrar algum ângulo na figura que tenha com o ângulo  $a$  um lado diretamente paralelo e outro inversamente paralelo?

1.16

Nos exemplos seguintes os alunos poderão utilizar as propriedades expressas neste descritor, uma vez que não se pede que reconheçam a respetiva validade. No entanto, alguns alunos poderão procurar justificar os resultados sem utilizar essas propriedades, ou seja, servindo-se apenas das já conhecidas anteriormente, o que corresponde a uma justificação das propriedades expressas no presente descritor, nos casos concretos adiante apresentados (cf. o Texto Complementar de Geometria).

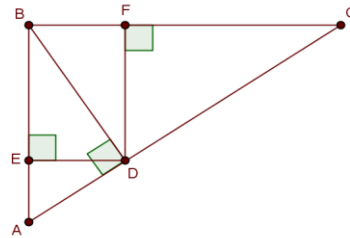
**Exemplo**

Na figura está representado o triângulo  $[ABC]$ , retângulo em  $A$ , sendo  $D$  o pé da perpendicular traçada de  $A$  para  $BC$ ,  $E$  o pé da perpendicular traçada de  $D$  para  $AB$  e  $F$  o pé da perpendicular traçada de  $D$  para  $AC$ . Determina as amplitudes representadas por  $x, y$  e  $z$  e explica o teu raciocínio indicando as propriedades utilizadas.



**Exemplo\***

Na figura está representado o triângulo  $[ABC]$ , retângulo em  $B$ , sendo  $D$  o pé da perpendicular traçada de  $B$  para  $AC$ ,  $E$  o pé da perpendicular traçada de  $D$  para  $AB$  e  $F$  o pé da perpendicular traçada de  $D$  para  $BC$ .



a. Justifica que:

$$\alpha_1. \widehat{FDB} = \widehat{EDA}$$

$$\alpha_2. \widehat{FCD} = \widehat{EBD}$$

b. Justifica que os ângulos  $ADF$  e  $FBD$  são suplementares, enunciando a propriedade utilizada.

2.2

**Exemplo\***

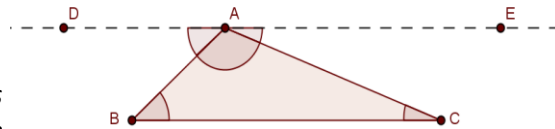
Na figura está representado um triângulo  $[ABC]$  e a reta  $DE$  paralela a  $BC$  passando por  $A$ .

a. Justifica que:

$$\alpha_1. \widehat{DAB} = \widehat{ABC};$$

$$\alpha_2. \widehat{EAC} = \widehat{ACB}.$$

b. Conclui que a soma dos ângulos internos  $CAB$ ,  $ABC$  e  $ACB$  é igual a um ângulo raso.



2.5

**Exemplo\*\***

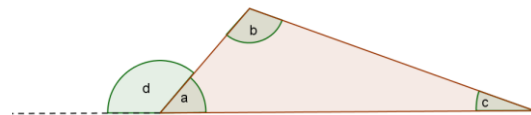
Justifica que a amplitude de um ângulo externo é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes.

R.:

Por um lado, a soma de  $a$  com  $d$  é igual a um ângulo raso.

Por outro lado, somando os ângulos  $a$ ,  $b$  e  $c$  (os três ângulos internos de um triângulo), obtém-se igualmente um ângulo raso.

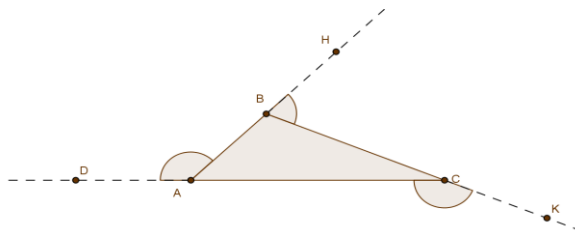
Logo, o ângulo  $d$  é igual à soma dos ângulos  $b$  e  $c$ .



2.6

**Exemplo\***

Na figura junta está representado um triângulo  $[ABC]$  e três ângulos externos de vértices distintos.



a. Justifica que a soma dos ângulos  $HBC$ ,  $CBA$ ,  $KCA$  e  $ACB$  é um ângulo giro.

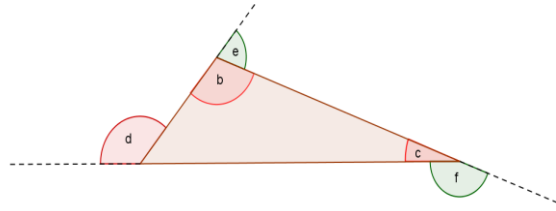
b. Indica dois ângulos internos do triângulo cuja soma das amplitudes seja igual à amplitude do ângulo  $DAB$ .

c. Justifica que  $\widehat{HBC} + \widehat{KCA} + \widehat{DAB} = 360^\circ$ .

**Exemplo\*\***

Justifica que a soma de três ângulos externos de vértices distintos de um triângulo é um ângulo giro.

R.: Dado um triângulo qualquer, verifica-se que, por definição, um ângulo externo é suplementar do interno adjacente. Assim, a soma de dois ângulos internos com dois externos respectivamente adjacentes é igual à soma de dois ângulos rasos, ou seja, a um ângulo giro. Ora, a soma dos dois internos pode ser substituída pelo externo não adjacente (2.5), portanto a soma destes três ângulos externos com vértices distintos é igual a um ângulo giro.

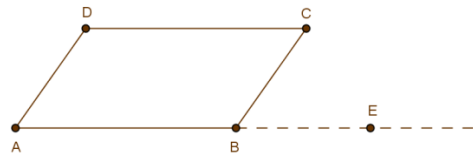


2.7

**Exemplo**

Na figura junta está representado um paralelogramo  $[ABCD]$  e o segmento de reta  $[BE]$  resultou do prolongamento do lado  $[AB]$ . Justifica que:

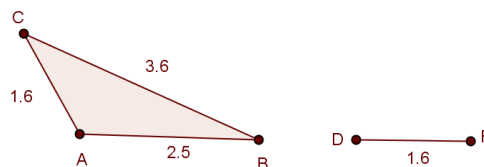
- os ângulos  $DAB$  e  $CBE$  são iguais.
- os ângulos  $CBE$  e  $DCB$  são iguais.
- ângulos opostos de um paralelogramo são iguais.
- ângulos adjacentes ao mesmo lado de um paralelogramo são suplementares.



2.9

**Exemplo**

Considera o triângulo  $[ABC]$  representado junto, onde estão indicadas as medidas do comprimento, em centímetros, de cada um dos lados, e um segmento de reta  $[DF]$  igual a  $[AC]$ . Constrói um triângulo  $[DFG]$  igual a  $[ABC]$ .

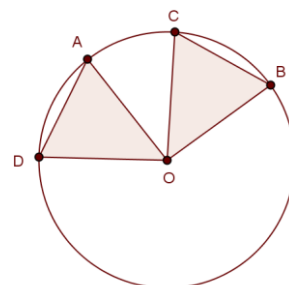
**Exemplo**

Pretendemos construir um triângulo  $[ABC]$  tal que  $\overline{AB} = 7$  cm,  $\overline{BC} = 4,2$  cm. Verifica se é possível completar a construção do triângulo escolhendo para medida de  $\overline{AC}$  em centímetros, sucessivamente, 2; 2,8; 3,6; 11,2 e 13.

**Exemplo\***

Na figura junta está representada uma circunferência de centro  $O$  e pontos  $A, B, C$  e  $D$  da circunferência tais que  $\overline{DA} = \overline{CB}$ .

- Utilizando o critério de igualdade de ângulos, identifica os ângulos que são iguais nos triângulos  $[DAO]$  e  $[OCB]$ .
- Justifica que são iguais os triângulos referidos na alínea anterior.



O exemplo anterior pode ser generalizado; quando existir uma correspondência um a um que associa cada lado de um triângulo a um lado igual de outro, então o critério de igualdade de ângulos invocado a propósito de 1.1 (GM4-2.11) permite concluir que são iguais os ângulos internos formados por lados correspondentes. Em particular esses triângulos terão tanto os lados como os ângulos internos correspondentes dois a dois iguais e serão portanto iguais (cf. GM4-3.7 e o Texto Complementar de Geometria).

2.10

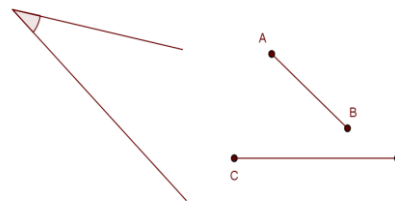
**Exemplo**

Constrói um triângulo  $[ABC]$  tal que  $\overline{AB} = 4,5\text{cm}$ ,  $\overline{AC} = 2,5\text{cm}$  e  $\widehat{BAC} = 100^\circ$ .

**Exemplo**

Constrói um triângulo com um ângulo interno igual ao da figura e lados adjacentes a esse ângulo respectivamente iguais aos segmentos representados ao lado,

- utilizando régua e transferidor.
- sem utilizar transferidor, ou seja, transportando o ângulo utilizando apenas régua e compasso.

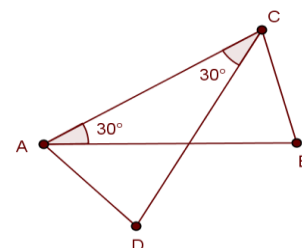


O critério de igualdade de ângulos (GM4-2.11), atrás recordado (a propósito de 1.1) pressupõe que também vale o recíproco, para que fique garantida a respetiva coerência; ou seja, se dois ângulos tiverem a mesma amplitude (se forem iguais), marcando pontos equidistantes dos vértices nos lados correspondentes de cada um dos ângulos serão iguais os segmentos de reta determinados por cada par de pontos assim fixado em cada ângulo. Esta propriedade, que deve ser admitida, permite reconhecer como iguais os lados que se opõem a ângulos iguais em dois triângulos, se além disso tiverem respetivamente iguais os lados adjacentes a esses ângulos; daí resulta o critério LAL de igualdade de triângulos, ficando garantida a igualdade dos terceiros lados de cada triângulo (cf. o Texto Complementar de Geometria).

**Exemplo**

Na figura junta estão representados dois triângulos  $[ABC]$  e  $[CAD]$  tais que  $\widehat{CAB} = \widehat{ACD} = 30^\circ$  e  $\overline{AB} = \overline{DC}$ .

- Justifica que os triângulos  $[ABC]$  e  $[CAD]$  são iguais e que  $\overline{AD} = \overline{BC}$ .
- Tendo em conta a alínea anterior, indica os restantes pares de ângulos internos iguais determinados pelos pontos  $A, B, C$  e  $D$  nos dois triângulos  $[ABC]$  e  $[CAD]$ .



2.11

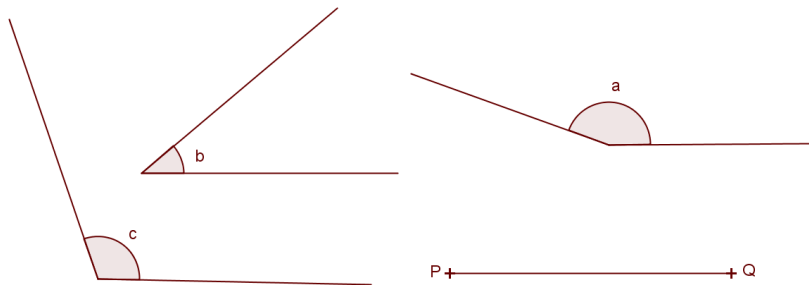
**Exemplo**

Constrói um triângulo  $[ABC]$  tal que  $\overline{AB} = 4\text{cm}$ ,  $\widehat{BAC} = 60^\circ$  e  $\widehat{ABC} = 30^\circ$ .



### Exemplo

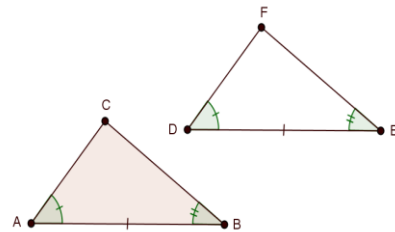
Constrói um triângulo  $[ABC]$  tal que  $[AB]$  é igual ao segmento  $[PQ]$  representado na figura e os ângulos  $BAC$  e  $ABC$  são respetivamente iguais a dois dos representados na figura. Quantos triângulos diferentes consegues construir desta maneira? Porquê?



No exemplo seguinte pretende-se que o aluno reconheça que as três condições do critério ALA são suficientes para que dois triângulos sejam iguais, ou seja, para que os três lados e os três ângulos sejam iguais. Trata-se de uma atividade complementar que, a ser trabalhada, requer tempo e o apoio constante do professor.

### Exemplo\*\*

Os triângulos representados  $[ABC]$  e  $[DEF]$  são tais que  $\overline{AB} = \overline{DE}$ ,  $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$  e  $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$ .



a. Mostra que  $\overline{AC} = \overline{DF}$ , percorrendo os seguintes passos:

a<sub>1</sub>. Imagina que  $\overline{AC} < \overline{DF}$  e prolonga o segmento  $[AC]$  traçando um segmento  $[CG]$  de tal forma que  $[AG]$  fique igual a  $[DF]$ .

a<sub>2</sub>. Os dois triângulos  $[AGB]$  e  $[DFE]$  seriam iguais e nesses triângulos seriam iguais os lados  $[BG]$  e  $[FE]$ . Porquê?

a<sub>3</sub>. Explica por que razão os ângulos  $ABG$  e  $DEF$  também seriam iguais.

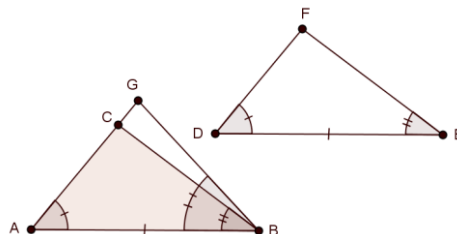
a<sub>4</sub>. Mas nesse caso também se teria  $\widehat{ABC} = \widehat{ABG}$ . Vês porquê? Explica o absurdo a que chegámos!

a<sub>5</sub>. Se tivéssemos considerado que  $\overline{AC} > \overline{DF}$ , também chegávamos a um absurdo. Porquê?

a<sub>6</sub>. Se  $\overline{AC}$  não pode ser inferior nem superior a  $\overline{DF}$ , então a que conclusão podes chegar?

b. Mostra que os triângulos  $[ABC]$  e  $[DEF]$  são iguais.

R.: a<sub>1</sub>.



a<sub>2</sub>. Como estamos a imaginar que  $\overline{AG} = \overline{DF}$ ,  $\overline{AB} = \overline{DE}$  e  $\widehat{CAB} = \widehat{FDE}$ , então, pelo critério LAL, os dois triângulos  $[AGB]$  e  $[DFE]$  são iguais, sendo também iguais os lados  $[BG]$  e  $[FE]$ .

- a<sub>3</sub>. Os dois triângulos  $[ABG]$  e  $[DEF]$  são iguais, logo os ângulos correspondentes  $ABG$  e  $DEF$  são iguais.
- a<sub>4</sub>. Acabámos de ver que  $D\hat{E}F = A\hat{B}G$ . Mas já sabíamos desde o início que  $D\hat{E}F = A\hat{B}C$ , por isso  $A\hat{B}C = A\hat{B}G$ . Isto é absurdo porque  $A\hat{B}C + C\hat{B}G = A\hat{B}G$ ! Daqui se conclui que a afirmação  $\overline{AC} < \overline{DF}$  não pode ser verdadeira.
- a<sub>5</sub>. Se  $\overline{DF} < \overline{AC}$  poderíamos fazer o mesmo raciocínio mas, desta vez, prolongávamos  $[DF]$ , o que conduziria também a um absurdo. Isto quer dizer que a afirmação  $\overline{DF} < \overline{AC}$  também não pode ser verdadeira.
- a<sub>6</sub>. Como  $\overline{AC}$  não pode ser nem maior nem menor do que  $\overline{DF}$ , só pode ser igual.
- c. Como  $\overline{AC} = \overline{DF}$ ,  $\overline{AB} = \overline{DE}$  e  $B\hat{A}C = E\hat{D}F$ , pelo critério LAL os triângulos são iguais.

2.12

**Exemplo**

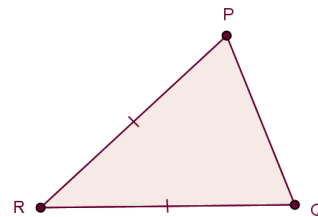
Considera um triângulo  $[ABC]$  tal que  $\overline{AB} = \overline{AC}$ . Justifica que os ângulos  $ABC$  e  $ACB$  são iguais.

R.: Basta aplicar o critério de igualdade de ângulos referido no descritor GM4-2.11, relembado a propósito do descritor 1.1.

**Exemplo\***

Na figura está representado um triângulo  $[PQR]$  em que os lados  $[PR]$  e  $[QR]$  são iguais.

- a. Considera  $M$  o ponto médio de  $[PQ]$  e une  $M$  ao ponto  $R$ . Prova que os triângulos  $[PMR]$  e  $[QMR]$  são iguais.
- b. Mostra que os ângulos  $RPQ$  e  $RQP$  são correspondentes nos dois triângulos (e portanto iguais).



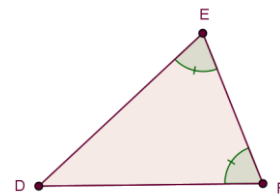
- R.: a. Já sabemos que  $\overline{RP} = \overline{RQ}$ . Também, como  $M$  é o ponto médio de  $[PQ]$ ,  $\overline{PM} = \overline{MQ}$ . Como o lado  $[RM]$  é comum aos triângulos  $[PMR]$  e  $[QMR]$ , pelo critério LLL, estes triângulos são iguais.
- b.  $\overline{RP} = \overline{RQ}$  e  $\overline{PM} = \overline{MQ}$ , logo os ângulos  $RPM$  e  $RQM$  são correspondentes nos triângulos iguais  $[PMR]$  e  $[QMR]$ . Como os ângulos  $RPQ$  e  $RQP$  coincidem respetivamente com estes ângulos, também são iguais.

O reconhecimento da recíproca desta propriedade (bem como da recíproca da propriedade enunciada no descritor seguinte, 2.13, pode ser efetuado utilizando um raciocínio pelo absurdo, semelhante ao utilizado no último exemplo de 2.11. Tratando-se de um processo demonstrativo complexo, não será exigível à generalidade dos alunos.

**Exemplo\*\***

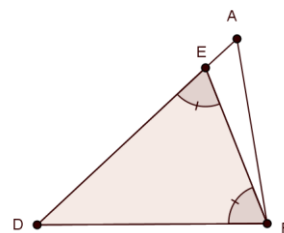
Na figura está representado um triângulo  $[DEF]$  em que  $D\hat{E}F = D\hat{F}E$ .

Prova que  $\overline{DE} = \overline{DF}$  começando por imaginar que  $\overline{DE} \neq \overline{DF}$  e percorrendo os seguintes passos até chegar a um absurdo:



a. Vamos começar por supor que, por exemplo,  $\overline{DE} < \overline{DF}$ .

- $\alpha_1$ . Prolonga o segmento  $[DE]$  traçando um segmento  $[EA]$  de tal forma que  $\overline{DA} = \overline{DF}$ ; o que podemos afirmar então acerca dos ângulos  $\widehat{DAF}$  e  $\widehat{DFA}$ ? Porquê?



$\alpha_2$ . Completa as seguintes afirmações:

Como  $\widehat{DFA} = \widehat{AFE} + \dots$  e  $\widehat{DFE} = \widehat{DEF}$  então  $\widehat{DFA} \dots \widehat{DEF}$ . Mas, em  $\alpha_1$  já tínhamos afirmado que  $\widehat{DAF} \dots \widehat{DFA}$  logo  $\widehat{DAF} \dots \widehat{DEF}$ .

$\alpha_3$ . Como sabes, o ângulo  $\widehat{DEF}$  é externo do triângulo  $[EFA]$ , então podemos afirmar que  $\widehat{DEF} = \dots + \dots$ .

$\alpha_4$ . De  $\alpha_3$  podes concluir que  $\widehat{DAF} \dots \widehat{DEF}$  mas em  $\alpha_2$  já tinhas concluído que  $\widehat{DAF} \dots \widehat{DEF}$ . Que conclusão tiras?

b. Imagina agora que  $\overline{DE} > \overline{DF}$ . Seguindo um raciocínio análogo ao utilizado em a. a que conclusão chegarias? Porquê?

c. O que podemos então concluir acerca de  $\overline{DE}$  e  $\overline{DF}$ ?

R.:  $\alpha_1$ .  $\widehat{DAF} = \widehat{DFA}$  porque, num triângulo, a lados iguais opõem-se ângulos iguais.

$\alpha_2$ . Como  $\widehat{DFA} = \widehat{AFE} + \widehat{DFE}$  e  $\widehat{DFE} = \widehat{DEF}$  então  $\widehat{DFA} > \widehat{DEF}$ . Mas, em  $\alpha_1$  já tínhamos afirmado que  $\widehat{DAF} = \widehat{DFA}$ , logo  $\widehat{DAF} > \widehat{DEF}$ .

$\alpha_3$ .  $\widehat{DEF} = \widehat{DAF} + \widehat{EFA}$ .

$\alpha_4$ . De  $\alpha_3$  podes concluir que  $\widehat{DAF} < \widehat{DEF}$ , mas em  $\alpha_2$  já tinhas concluído que  $\widehat{DAF} > \widehat{DEF}$ . A conclusão que tiramos é que chegámos a um absurdo, logo a hipótese que colocámos no início é falsa, ou seja, não é verdade que  $\overline{DE} < \overline{DF}$ .

b. Chegaria também a um absurdo, porque se pode usar um raciocínio análogo, supondo que  $\overline{DE} > \overline{DF}$  e completando  $[DF]$  com um segmento  $[FB]$  de modo a obter um segmento igual a  $[DE]$ .

c. Se é falso que  $\overline{DE} < \overline{DF}$  e que  $\overline{DE} > \overline{DF}$ , então  $\overline{DE} = \overline{DF}$ .

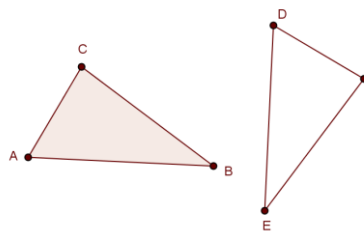
2.13

### Exemplo

Na figura seguinte estão representados dois triângulos  $[ABC]$  e  $[DEF]$  tais que  $\overline{AC} = \overline{DF}$ ,  $\overline{AB} = \overline{DE}$  e  $\overline{CB} = \overline{EF}$ .

a. Justifica que os triângulos são iguais.

b. Identifica os pares de ângulos iguais, referindo o critério de igualdade de ângulos.



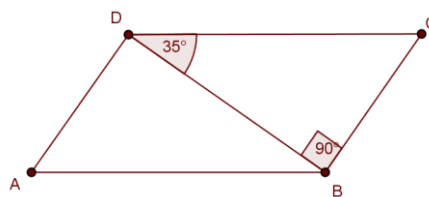
No exemplo anterior são indicados explicitamente três pares de lados iguais que determinam a igualdade dos dois triângulos; se soubéssemos que os triângulos são iguais mas indicássemos apenas dois lados iguais, um em cada triângulo, também seria fácil concluir que são iguais os ângulos opostos a esses lados nos dois triângulos (cf. o Texto Complementar de Geometria). A justificação, no caso geral, da igualdade dos lados opostos a ângulos iguais em triângulos iguais encontra-se tratada no Texto Complementar de Geometria e poderá ser reconhecida de modo mais informal pelos alunos.

2.16

**Exemplo**

Considera um paralelogramo  $[ABCD]$  tal que  $\widehat{CBD} = 90^\circ$  e  $\widehat{CDB} = 35^\circ$ .

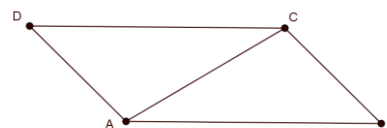
- Determina  $\widehat{DBA}$  e  $\widehat{BDA}$ .
- Justifica que os triângulos  $[ADB]$  e  $[CDB]$  são iguais.
- Justifica que  $\overline{AD} = \overline{BC}$  e  $\overline{AB} = \overline{DC}$ .

**Exemplo\***

Considera um paralelogramo  $[ABCD]$ .

Justifica que:

- $\widehat{DCA} = \widehat{BAC}$ ;
- $\widehat{DAC} = \widehat{BCA}$ ;
- os triângulos  $[DAC]$  e  $[BCA]$  são iguais;
- $\overline{DA} = \overline{CB}$  e  $\overline{DC} = \overline{AB}$ .



R.:

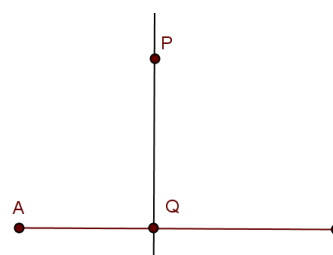
- $\widehat{DCA} = \widehat{BAC}$  porque são ângulos alternos internos determinados pela secante  $AC$  no par de retas paralelas  $AB$  e  $CD$ .
- $\widehat{DAC} = \widehat{BCA}$  porque são ângulos alternos internos determinados pela secante  $AC$  no par de retas paralelas  $AD$  e  $BC$ .
- Como  $[CA]$  é comum aos dois triângulos e tendo em conta que  $\widehat{DCA} = \widehat{BAC}$  e  $\widehat{DAC} = \widehat{BCA}$ , então, pelo critério ALA de igualdade de triângulos, os triângulos  $[DAC]$  e  $[BCA]$  são iguais.
- $\overline{DA} = \overline{CB}$  porque  $[DA]$  e  $[CB]$  se opõem, respetivamente, aos ângulos  $DCA$  e  $CAB$  que são iguais em triângulos iguais. Da mesma forma se justifica que  $\overline{DC} = \overline{AB}$  pois  $[DC]$  e  $[AB]$  opõem-se, respetivamente, a  $DAC$  e  $ACB$ .

2.20

**Exemplo**

Considera o segmento de reta  $[AB]$  e um ponto  $P$  que não pertence à reta  $AB$ . Sabendo que  $PQ$  e  $AB$  são perpendiculares, responde às questões que se seguem.

- Como denominas o ponto  $Q$  relativamente às retas  $PQ$  e  $AB$ ?
- \*Compara  $\overline{PQ}$  com  $\overline{PB}$  e justifica as tuas conclusões.
- \*Explica por que razão  $Q$  é o ponto da reta  $AB$  à menor distância de  $P$ .



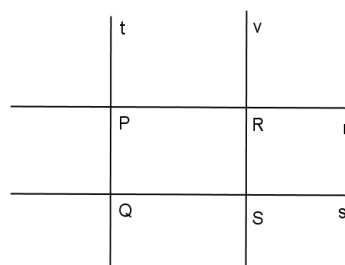
R.:

- O ponto  $Q$  diz-se o pé da perpendicular traçada do ponto  $P$  para a reta  $AB$ .
- O triângulo  $[PQB]$  é retângulo em  $Q$ , logo os dois ângulos internos restantes são agudos (2.3). Assim, neste triângulo, o ângulo de vértice  $Q$  é o maior ângulo interno. O lado oposto é portanto o maior lado do triângulo (2.15), pelo que  $\overline{PQ} < \overline{PB}$ .
- O raciocínio efetuado com o ponto  $B$ , na alínea anterior, pode ser repetido para qualquer ponto da reta  $AB$  distinto de  $Q$ .

2.22

**Exemplo\***

Considera duas retas paralelas  $r$  e  $s$  e, no mesmo plano, um par de retas  $t$  e  $v$  perpendiculares à reta  $r$  tal como se representa na figura junta.



- \*Justifica que  $t$  é paralela a  $v$ .
- \*Justifica que  $t$  e  $v$  são perpendiculares a  $s$ .
- Justifica que  $\overline{PQ} = \overline{RS}$ .
- Se  $T$  for um ponto da reta  $s$  que não coincida com  $Q$ , compara os comprimentos de  $\overline{PQ}$  com  $\overline{PT}$  e justifica a tua conclusão.

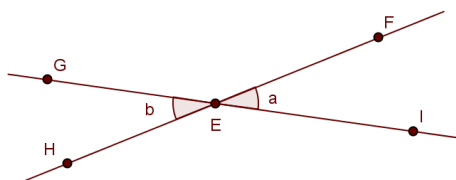
- R.: a. Atendendo a que as retas  $t$  e  $v$  são perpendiculares à reta  $r$  e portanto, em particular, formam ângulos correspondentes iguais (ambos retos) com  $r$ , concluímos que  $t$  e  $v$  são paralelas.(1.11)
- b. Sabemos que  $t$  e  $v$  são perpendiculares à reta  $r$ , ou seja, determinam com ela ângulos retos; como  $r$  e  $s$  são paralelas, os ângulos correspondentes que tanto  $t$  como  $v$  determinam em  $r$  e  $s$  são iguais, sendo portanto todos retos, pelo que  $t$  e  $v$  são também perpendiculares a  $s$ .
- c. Atendendo à hipótese ( $r$  e  $s$  são paralelas) e à alínea a.,  $[PRSQ]$  é um paralelogramo, logo os lados opostos são iguais pelo que  $\overline{PQ} = \overline{RS}$ .
- d.  $\overline{PQ} < \overline{PT}$  pois, a partir de 2.20, a distância de  $P$  ao pé da perpendicular traçada de  $P$  para a reta  $s$  é inferior à distância de  $P$  a qualquer outro ponto da reta  $s$ .

No exemplo anterior provou-se que, dadas duas retas paralelas num plano, qualquer perpendicular a uma delas no mesmo plano é perpendicular à outra e são iguais as distâncias entre dois quaisquer pontos, um em cada reta, que determinem uma perpendicular a uma (e portanto às duas retas), sendo essa a distância mínima entre um ponto de uma reta e um ponto de outra. Esta propriedade justifica a coerência da definição de distância entre duas retas paralelas através do comprimento de qualquer segmento unindo as retas e a elas perpendicular.

3.1

**Exemplo (1.7)**

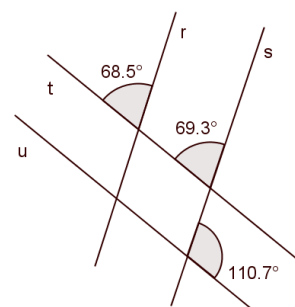
Na figura estão representadas as retas  $GI$  e  $HF$  que se intersectam no ponto  $E$ , definindo quatro ângulos convexos. Sabendo que  $\widehat{GEF} = 150^\circ$ , determina as amplitudes representadas por  $a$  e  $b$  e justifica o resultado obtido.



**Exemplo (1.11)**

Tendo em conta os dados da figura, responde às questões que se seguem.

- As retas  $r$  e  $s$  são paralelas? Justifica.
- As retas  $t$  e  $u$  são paralelas? Justifica.



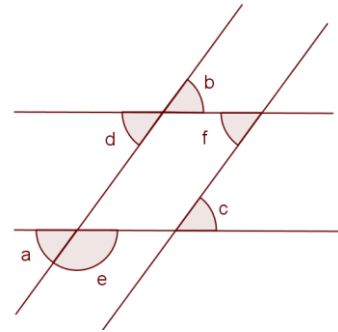
**Exemplo (1.7, 1.11 e 1.13 a 1.15)**

Na figura estão representados dois pares de retas paralelas.

a. Indica um par de ângulos que sejam:

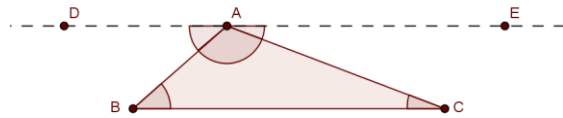
- $\alpha_1$ . alternos internos;
- $\alpha_2$ . correspondentes;
- $\alpha_3$ . verticalmente opostos;
- $\alpha_4$ . de lados dois a dois inversamente paralelos;
- $\alpha_5$ . de lados dois a dois diretamente paralelos.

b. Sabendo que  $\hat{a} = 50^\circ$ , determina, justificando, a amplitude dos ângulos  $b$ ,  $c$  e  $e$ .



**Exemplo (2.2)**

Tendo em conta a figura junta em que  $E\hat{A}C = 21^\circ$  e  $D\hat{A}B = 42^\circ$ , determina a medida da amplitude de cada um dos ângulos internos do triângulo  $[ABC]$  e justifica.

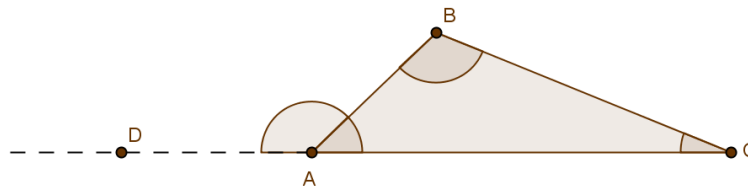


**Exemplo (2.2)**

Dois dos ângulos de um triângulo são iguais e o terceiro mede  $70^\circ$  de amplitude. Quanto mede a amplitude de cada um dos outros ângulos?

**Exemplo (2.5)**

Sabendo que, na figura junta,  $A\hat{B}C = 114^\circ$  e  $B\hat{C}A = 22^\circ$ , determina  $D\hat{A}B$ .

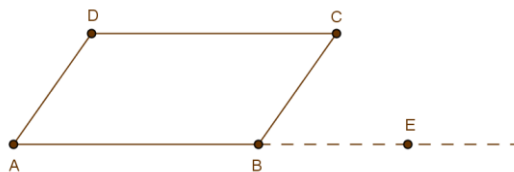


**Exemplo\* (2.2 ou 2.5)**

Constrói um triângulo  $[ABC]$  em que  $\overline{AB} = 5\text{cm}$ , sabendo que os ângulos externos em  $A$  e  $C$  medem respetivamente  $110^\circ$  e  $130^\circ$ .

**Exemplo (2.7)**

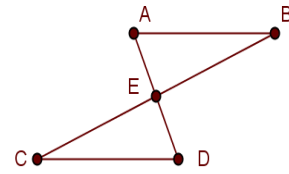
Tendo em conta a figura junta em que se representa um paralelogramo  $[ABCD]$  e  $B$  é um ponto do segmento  $[AE]$ , determina  $D\hat{A}B$  e  $D\hat{C}B$ , sabendo que  $C\hat{B}A = 123^\circ$ .



**Exemplo\* (2.11)**

Na figura, os segmentos  $[AB]$  e  $[CD]$  são paralelos e iguais e  $E$  é o ponto de interseção dos segmentos  $[AD]$  e  $[BC]$ .

- a. Justifica que  $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$  e que  $\widehat{BAD} = \widehat{CDA}$ .
- b. Justifica que os triângulos  $[ABE]$  e  $[DCE]$  são iguais.



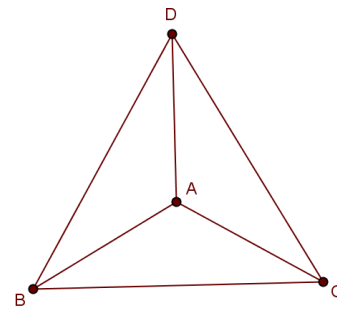
**Exemplo\* (2.12)**

- a. Justifica que um triângulo equilátero tem os ângulos todos iguais.
- b. Constrói um ângulo de amplitude  $60^\circ$  sem utilizares um transferidor.

**Exemplo\* (2.12; 2.13)**

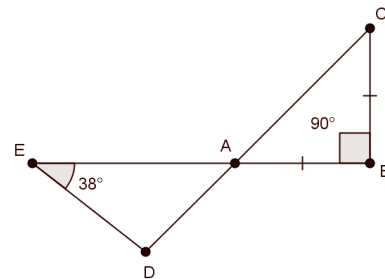
Na figura junta está representado um triângulo  $[BCD]$  e três segmentos de reta iguais  $[AB]$ ,  $[AD]$  e  $[AC]$  tais que  $\widehat{BAD} = \widehat{DAC} = \widehat{CAB}$ .

- a. Justifica que os três triângulos  $[BAD]$ ,  $[DAC]$  e  $[CAB]$  são iguais e que o triângulo  $[BCD]$  é equilátero.
- b. Determina as amplitudes dos ângulos internos de cada um dos triângulos em que está decomposto o triângulo  $[BDC]$ .



**Exemplo (1.7, 2.2, 2.12)**

Tendo em conta os dados da figura e que  $A$  é o ponto de interseção dos segmentos  $[EB]$  e  $[CD]$ , determina a medida da amplitude dos ângulos  $EAD$ ,  $EDA$  e  $CAB$ .



4.1  
4.2

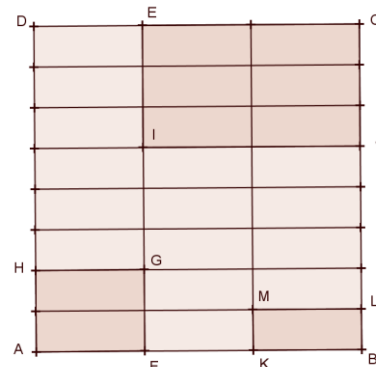
Dada uma unidade de comprimento, pretende-se justificar a fórmula que permite calcular a área de um retângulo tomando para unidade de área um quadrado de lados de comprimento igual à unidade («quadrado unitário»). Nos dois primeiros exemplos abaixo começa-se por abordar o caso em que os lados do retângulo têm medidas de comprimento expressas por frações unitárias e em seguida por frações próprias. No terceiro exemplo consideram-se também medidas expressas por frações impróprias.

**Exemplo**

Considera que os lados do quadrado unitário  $[ABCD]$  representado junto estão divididos em 8 e 3 partes iguais respetivamente.

- a. Determina o número de retângulos em que ficou dividido o quadrado unitário, sem os contar, e conclui qual a medida da área de cada um deles.
- b. Determina a medida dos comprimentos de dois lados consecutivos do retângulo  $[KBLM]$ .

c. Justifica por que razão a medida da área do retângulo  $[KBLM]$  pode ser obtida como produto das medidas dos comprimentos de dois lados consecutivos.

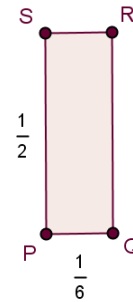


- d. Indica a medida da área do retângulo  $[AFGH]$ , começando por exprimir os respetivos lados como fração unitária e utilizando processos idênticos aos das alíneas anteriores.
- e. Indica duas frações que exprimam as medidas dos comprimentos dos lados do retângulo  $[EIJC]$  e determina o número de retângulos iguais a  $[KBLM]$  em que está decomposto, relacionando este último número com os numeradores das frações indicadas.
- f. Calcula a área do retângulo  $[EIJC]$ , justificando por que razão pode ser obtida como produto das medidas dos comprimentos de dois lados consecutivos.

### Exemplo

Considera o retângulo  $[PQRS]$  representado junto e as respetivas dimensões numa dada unidade.

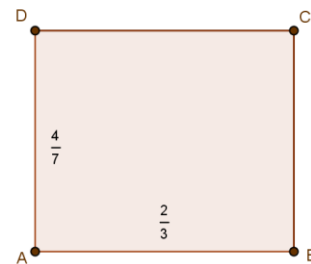
- a. Constrói um quadrado de lado unitário decomposto em retângulos iguais a  $[PQRS]$  e relaciona o número de retângulos com a área de cada um deles.
- b. Determina a área do retângulo, justificando o resultado obtido.



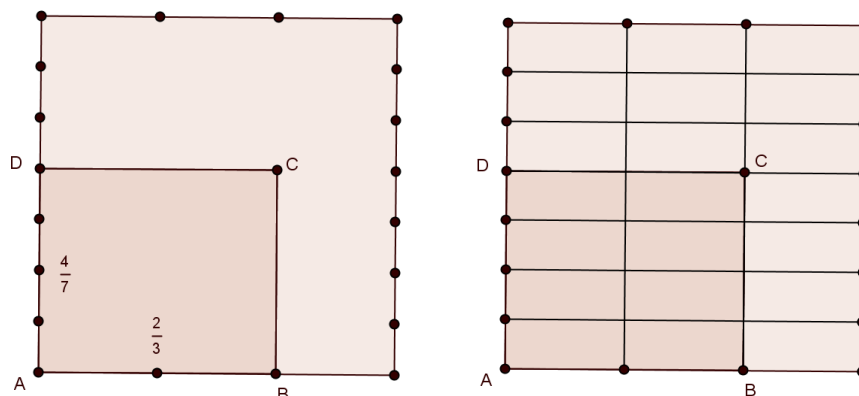
### Exemplo \*\*

Considera o retângulo representado junto e as respetivas dimensões numa dada unidade.

- a. Completa a figura representada, construindo um quadrado unitário e justifica o procedimento.
- b. Calcula a medida da área de  $[ABCD]$  em unidades quadradas (sem utilizar diretamente a fórmula, ou seja, apenas a partir da definição de medida nessa unidade de área) e conclui como se poderia obter essa medida de área com uma simples operação sobre as medidas de comprimento dos lados.



R.: a.



O lado  $[AD]$  foi dividido em 4 partes iguais para se obter um segmento de reta de comprimento  $\frac{1}{7}$ . Da mesma forma, o lado  $[AB]$  foi dividido em 2 partes iguais para se obter um segmento de reta de comprimento  $\frac{1}{3}$ .

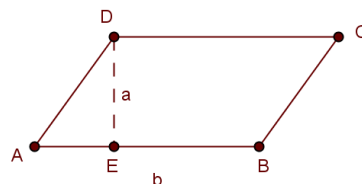
b. Observando a figura da direita, verifica-se que o quadrado de lado unitário e consequentemente de área unitária está dividido em  $3 \times 7 = 21$  retângulos todos



iguais, ou seja, com a mesma área. Cada um desses retângulos terá, portanto,  $\frac{1}{21}$  unidades de área. Como o retângulo  $[ABCD]$  é formado por  $2 \times 4 = 8$  desses retângulos, então a sua área será igual a  $\frac{8}{21} = \frac{2 \times 4}{3 \times 7} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{7}$  de uma unidade quadrada. Ou seja, a medida da área do retângulo em unidades quadradas é igual ao produto das medidas de comprimento de dois lados consecutivos.

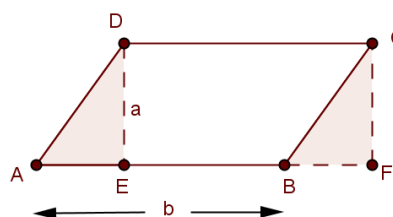
4.5

O aluno deve, em casos concretos, identificar um retângulo equivalente ao paralelogramo dado e com base e altura respectivamente iguais às deste para justificar que a medida da área do paralelogramo é igual ao produto da medida da base pela da altura, tal como acontece com a área do retângulo.



**Exemplo\***

Na figura junta estão representados um paralelogramo  $[ABCD]$  e um retângulo  $[EFCD]$ . Prova que têm a mesma área, e bases e alturas respectivamente iguais.



R.: Sabemos que  $\overline{AD} = \overline{BC}$  por serem lados opostos de um paralelogramo (2.16) e, pela mesma razão,  $\overline{ED} = \overline{FC}$  e que os ângulos  $ADE$  e  $BCF$  são iguais pois têm os lados diretamente paralelos (1.14), pelo que os triângulos  $[AED]$  e  $[BFC]$  são iguais (caso LAL), logo as áreas também são iguais.

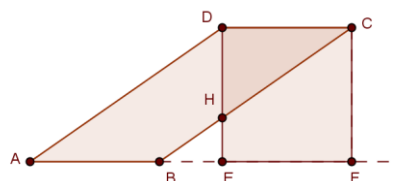
Assim,  $A_{[ABCD]} = A_{[ABCD]} - A_{[AED]} + A_{[BFC]} = A_{[EFCD]} = \overline{EF} \times a$ .

Observa-se ainda que, como  $\overline{AE} = \overline{BF}$  pois são lados opostos a ângulos iguais em triângulos iguais, então  $b = \overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB} = \overline{BF} + \overline{EB} = \overline{EF}$ , pelo que “a área do paralelogramo é igual ao produto da base pela altura”:

$$A_{[ABCD]} = b \times a.$$

**Exemplo\***

Na figura está representado um paralelogramo  $[ABCD]$ . Prolongando um pouco o lado  $[AB]$  de modo a que as perpendiculares traçadas de  $D$  e  $C$  para a base o intersectem, obtém-se dois pontos  $E$  e  $F$ , sendo  $H$  a interseção de  $DE$  com  $BC$ .



Prova que a área do paralelogramo  $[ABCD]$  é igual à área do retângulo  $[EFCD]$  e que  $\overline{EF} = \overline{AB}$ , percorrendo os seguintes passos:

- Prova que os triângulos  $[AED]$  e  $[BFC]$  são iguais.
- Conclui da alínea anterior que os quadriláteros  $[ABHD]$  e  $[EFCH]$  são equivalentes.
- Conclui que a área do paralelogramo  $[ABCD]$  é igual à área do retângulo  $[EFCD]$ , e justifica a igualdade  $\overline{EF} = \overline{AB}$ .
- Conclui que a área do paralelogramo é igual ao produto da medida da base pela altura.

R.:

a. Sabemos que  $\overline{AD} = \overline{BC}$  por serem lados opostos de um paralelogramo (2.16) e, pela mesma razão,  $\overline{ED} = \overline{FC}$  e que os ângulos  $ADE$  e  $BCF$  são iguais pois têm os lados diretamente paralelos (1.14), pelo que os triângulos  $[AED]$  e  $[BFC]$  são iguais (caso LAL), logo as áreas também são iguais.

b. As áreas do quadrilátero  $[ADHB]$  e  $[EFCH]$  são iguais uma vez que a soma de cada uma delas com a área do triângulo  $[BEH]$  é igual à área (comum) dos triângulos  $[AED]$  e  $[BFC]$ .

c. Tem-se  $A_{[ABCD]} = A_{[ABHD]} + A_{[DHC]} = A_{[EFCH]} + A_{[DHC]} = A_{[EFCD]}$ .

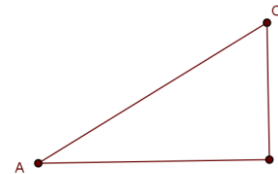
Por outro lado,  $\overline{EF} = \overline{CD} = \overline{AB}$  uma vez que  $[ABCD]$  e  $[EFCD]$  são paralelogramos.

d. A área do retângulo  $[EFCD]$  é igual ao produto de  $\overline{EF}$  ( $= \overline{AB}$ ) por  $\overline{FC}$ . Como  $[AB]$  e  $[FC]$  são respetivamente uma base e a altura correspondente do paralelogramo e este paralelogramo é equivalente a  $[ABCD]$ , conclui-se que “a área do paralelogramo é igual ao produto da base pela altura”.

4.6

### Exemplo

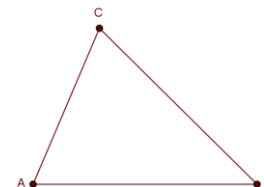
Na figura está representado um triângulo  $[ABC]$  retângulo em  $B$ . Justifica que a área do triângulo é metade da área de um retângulo com a mesma base e altura do triângulo seguindo os seguintes passos:



- Constrói o retângulo  $[ABCD]$  e justifica que a hipotenusa do triângulo divide o retângulo em dois triângulos iguais e, como tal, com a mesma área.
- Compara a área do retângulo  $[ABCD]$  com a do triângulo  $[ABC]$ .

### Exemplo\*

Na figura está representado um triângulo acutângulo  $[ABC]$ . Justifica que a área do triângulo é metade da área de um retângulo com a mesma base e altura do triângulo seguindo os seguintes passos:



- Traça a altura relativa ao vértice  $C$  e designa por  $D$  o pé da perpendicular.
- Constrói os retângulos  $[ADCE]$  e  $[DBFC]$ . Justifica que cada um destes retângulos é dividido pela respetiva diagonal em dois triângulos iguais e, como tal, com a mesma área.
- Compara a área do retângulo  $[ABFE]$  com a do triângulo  $[ABC]$ .

O exemplo seguinte constitui um argumento geral, não sendo necessário que o pé da perpendicular traçada de  $C$  para a reta  $AB$  pertença ao segmento de reta  $[AB]$ .

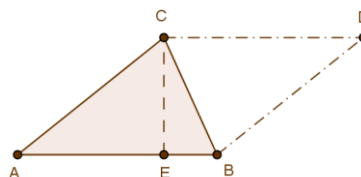
### Exemplo\*

Justifica que a área de um triângulo é igual a metade da área de um paralelogramo com a mesma base e altura que o triângulo percorrendo os seguintes passos:

- Desenha um triângulo qualquer  $[ABC]$ . Pelo ponto  $C$  traça uma reta paralela a  $AB$  e pelo ponto  $B$  traça uma reta paralela a  $AC$ . Designa o ponto de interseção das duas retas por  $D$  e verifica que obténs um paralelogramo.
- Traça a altura relativa à base  $[AB]$  e designa o ponto de interseção da altura com a reta suporte da base por  $E$ .

- c. Escreve uma expressão que permita obter a área do paralelogramo.
- d. Prova que a diagonal  $[BC]$  do paralelogramo  $[ABDC]$  o divide em dois triângulos iguais.
- e. Justifica que a área do triângulo  $[ABC]$  é metade da área do paralelogramo  $[ABDC]$  e escreve uma expressão que permita obter a área do triângulo a partir do comprimento de uma base e correspondente altura.

R.: a. e b. Traçando por  $C$  uma reta paralela a  $AB$  e por  $B$  uma reta paralela a  $AC$ , obtém-se o ponto  $D$  interseção das duas retas e um paralelogramo  $[ACDB]$  com a mesma base e altura do triângulo dado.



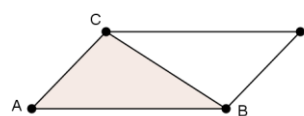
- c. A área do paralelogramo pode ser dada por  $\overline{AB} \times \overline{CE}$ .
- d. Este paralelogramo fica decomposto, pela diagonal  $[BC]$ , em dois triângulos iguais (caso *LLL*) sendo um deles o inicial. De facto, como  $[ABDC]$  é um paralelogramo, os pares de lados opostos são iguais e  $[CB]$  é um lado comum aos dois triângulos.
- e. Por fim, conclui-se que a medida da área do triângulo  $[ABC]$  é metade da medida da área do paralelogramo e, portanto, igual a  $\frac{\overline{AB} \times \overline{CE}}{2} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$ .

5.1

Os problemas a propor aos alunos devem ter vários níveis de dificuldade, sendo o mais elementar o que consiste em determinar a área de um paralelogramo ou de um triângulo aplicando a fórmula da respetiva área a partir das medidas da base e da altura a ela relativa. Os alunos devem também saber determinar a área de figuras que resultem da composição de triângulos e/ou paralelogramos cujas dimensões são dadas ou que podem ser obtidas a partir dos dados fornecidos, nomeadamente relativos ao perímetro da figura, e ainda saber construir triângulos e paralelogramos sendo conhecidas as medidas da área e da altura ou da base.

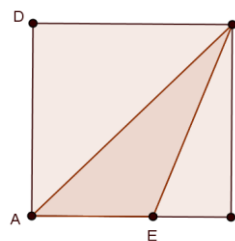
**Exemplo (4.6)**

Sabendo que a área do paralelogramo  $[ABDC]$  é igual a  $14 \text{ cm}^2$ , determina a área do triângulo  $[ABC]$  e justifica.



**Exemplo (4.4 e 4.6)**

Na figura estão representados um quadrado  $[ABCD]$  de área  $16 \text{ cm}^2$  e um triângulo  $[AEC]$ . Sabendo que  $\overline{EB} = 1,6 \text{ cm}$ , determina a área do triângulo  $[AEC]$ .



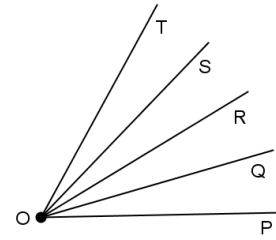
**Exemplo\* (4.5 e 4.6)**

Considera um retângulo  $[ABCD]$  e, em cada um dos seus lados, o respetivo ponto médio. Prova que a área do quadrilátero cujos vértices são os pontos médios assim obtidos é metade da área do retângulo inicial.

6.1  
6.2

**Exemplo**

Tomando o ângulo  $TOP$  por unidade de medida de amplitude e sabendo que está dividido em quatro ângulos iguais, representados na figura, indica a medida da amplitude dos ângulos  $POQ$  e  $POS$ .



R.: A medida de  $P\hat{O}Q$  é igual a  $\frac{1}{4}$  e a medida da amplitude do ângulo  $POS$  é igual a  $\frac{3}{4}$ .

**Exemplo\***

Considerando a figura do exemplo anterior e tomando o ângulo  $SOP$  por unidade de medida de amplitude, determina a medida da amplitude dos ângulos  $ROP$  e  $TOP$ .

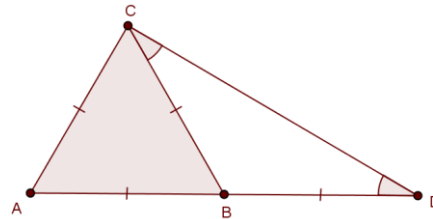
7.1

Neste descritor incluem-se todo o tipo de problemas que envolvam a determinação da medida de amplitude de ângulos com e sem aplicação das propriedades identificadas nos descritores relativos ao domínio GM5.

**Exemplo \*** (2.2, 2.5, 2.12)

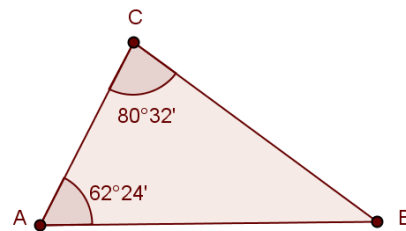
Na figura está representado um triângulo  $[ABC]$  equilátero e um triângulo  $[CBD]$  isósceles.

- a. Determina a medida da amplitude dos ângulos  $BCD$  e  $BDC$ .
- b. Classifica o triângulo  $[ACD]$  quanto aos ângulos e justifica.



**Exemplo (2.2)**

Determina a medida da amplitude do ângulo  $ABC$  em graus e minutos tendo em conta os dados da figura.



**Exemplo (1.5)**

Determina a medida da amplitude de um ângulo  $\alpha$  em graus e minutos, sabendo que é suplementar de um ângulo de amplitude  $35,7^\circ$ .

Descritor	Texto de apoio
1.4	<p>Até ao presente momento, o traço de fração foi utilizado apenas para separar o numerador e o denominador de uma fração.</p> <p>No descritor NO4-5.4 verificou-se que, dados dois números naturais <math>a</math> e <math>b</math>, se tem <math>\frac{a}{b} = a : b</math>, ou seja, a fração <math>\frac{a}{b}</math> coincide com o quociente resultante da divisão de <math>a</math> por <math>b</math>, resultado que pode aqui ser recordado. Em continuidade, e tendo-se já definido o quociente de dois números racionais positivos, estende-se aqui a notação <math>\frac{q}{r}</math> para designar o quociente <math>q : r</math>.</p>
1.5 1.6	<p>Os alunos poderão reconhecer estas propriedades em exemplos concretos, utilizando, em particular, os resultados indicados nos descritores NO5-1.6 e NO5-1.7, em conjunto com os quais podem ser trabalhadas.</p> <p><b>Exemplo</b></p> <p>a. Calcula o produto <math>3 \times \frac{1}{3}</math> e deduz o valor do inverso de 3 e do inverso de <math>\frac{1}{3}</math>.</p> <p>b. O que entendes pelo quociente de 1 por <math>\frac{4}{7}</math>? Conclui que se pode escrever o inverso de <math>\frac{4}{7}</math> como o quociente de 1 por um número.</p> <p>c. Atendendo ao que respondeste na alínea b. e ao que sabes acerca da divisão de duas frações escreve o inverso de <math>\frac{4}{7}</math> como uma fração.</p> <p>d. Completa as seguintes igualdades utilizando números naturais:  <math display="block">\frac{5}{3} : \frac{4}{7} = \frac{[\quad]}{3} \times \frac{7}{[\quad]} = \frac{5}{3} \times \frac{1}{[\quad]}</math></p> <p>e. *Observando as igualdades anteriores, conjectura como se pode calcular o quociente de dois números racionais através de um produto.</p> <p>R.: a. <math>3 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1</math>. Por definição, o inverso de 3 é <math>\frac{1}{3}</math> e o inverso de <math>\frac{1}{3}</math> é 3.</p> <p>b. Por definição, o quociente <math>1 : \frac{4}{7}</math> é o número pelo qual se deve multiplicar <math>\frac{4}{7}</math> para se obter 1</p> $\frac{4}{7} \times \left(1 : \frac{4}{7}\right) = 1.$ <p>Assim, o inverso de <math>\frac{4}{7}</math> é igual a <math>1 : \frac{4}{7} = \frac{1}{\frac{4}{7}}</math>.</p> <p>c. Temos <math>1 : \frac{4}{7} = 1 \times \frac{7}{4} = \frac{7}{4}</math>.</p> <p>d. <math>\frac{5}{3} : \frac{4}{7} = \frac{5}{3} \times \frac{7}{4} = \frac{5}{3} \times \frac{1}{\frac{4}{7}}</math>;</p> <p>dividir por <math>\frac{4}{7}</math> é o mesmo que multiplicar pelo inverso de <math>\frac{4}{7}</math>.</p> <p>e. Dividir por um número é o mesmo do que multiplicar pelo respetivo inverso.</p> <p>De modo mais geral, dado um número racional <math>q</math>, tem-se <math>q \times (1 : q) = 1</math>.  <math>(1 : q)</math> é o número pelo qual se deve multiplicar <math>q</math> para obter 1, descritor NO4-5.3 )  Desta forma, por definição, o inverso de <math>q</math> é igual a <math>1 : q</math>, ou, com a notação introduzida em 1.4, <math>\frac{1}{q}</math>. O que se fez na alínea d. do exemplo também se pode estender a qualquer racional, ou seja, dividir por <math>q</math> é o mesmo que multiplicar pelo inverso de <math>q</math>, ou seja, por <math>\frac{1}{q}</math>.</p>

1.7  
1.8  
1.9

Estas propriedades constituem generalizações dos resultados apresentados nos descritores NO5-1.6 e NO5-1.7, justificando-se assim, em particular, o uso do traço de fração para designar o quociente de dois números racionais.

**Exemplo**

a. Mostra que  $\left(\frac{5}{7} \times \frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{7}{5} \times \frac{3}{2}\right) = 1$  e conclui que o inverso do produto é igual ao produto dos inversos.

b. \*Calcula  $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}$ ,  $\frac{5}{\frac{7}{3}}$  e  $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{7}}$  e conclui que o inverso do primeiro quociente é igual ao quociente dos inversos.

c. \*\* Mostra que  $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} \times \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{\frac{2 \times a}{3 \times b}}{\frac{5 \times c}{7 \times d}}$ , onde  $a, b, c$  e  $d$  são números naturais.

d. Se na alínea anterior for  $a = 5, b = 7, c = 2$  e  $d = 3$ , qual o resultado do produto? O que concluis quanto ao inverso do quociente entre  $\frac{2}{3}$  e  $\frac{5}{7}$ ?

e. Transforma  $\frac{\frac{0,3}{1,5}}{\frac{2,2}{4,7}}$  num produto de dois quocientes e em seguida num quociente de dois produtos.

R.:

a.  $\left(\frac{5}{7} \times \frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{7}{5} \times \frac{3}{2}\right) = \frac{5 \times 2}{7 \times 3} \times \frac{7 \times 3}{5 \times 2} = 1$  portanto  $\frac{7}{5} \times \frac{3}{2}$  é o inverso de  $\frac{5}{7} \times \frac{2}{3}$  pois o produto dos dois números é igual a 1. Como  $\frac{7}{5}$  é o inverso de  $\frac{5}{7}$  e  $\frac{3}{2}$  é o inverso de  $\frac{2}{3}$ , concluímos, neste caso, que o inverso do produto é igual ao produto dos inversos.

b. Dividir por um número racional é o mesmo do que multiplicar pelo seu inverso:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{2 \times 7}{3 \times 5} = \frac{14}{15}$$

$$\frac{\frac{5}{7}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{7} \times \frac{3}{2} = \frac{5 \times 3}{7 \times 2} = \frac{15}{14}$$

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{2}} = \frac{3}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{3 \times 2}{5 \times 7} = \frac{6}{35}$$

Concluimos, neste caso, que o inverso do quociente (2ª linha) é igual ao quociente dos inversos (3ª linha).

c.

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} \times \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} \times \frac{a}{b} \times \frac{1}{c}$$

(Dividir por um número é o mesmo do que multiplicar pelo seu inverso.)

$$= \frac{2}{3} \times \frac{a}{b} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{c} \times \frac{1}{d} = \frac{2}{3} \times \frac{a}{b} \times \frac{1}{5 \times 7 \times c \times d}$$

(O produto dos inversos é o inverso do produto.)

$$= \frac{\frac{2}{3} \times \frac{a}{b}}{\frac{5}{7} \times \frac{c}{d}}$$

(Multiplicar pelo inverso de um número é o mesmo do que dividir por esse número.)

d.

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} \times \frac{\frac{7}{2}}{\frac{3}{7}} = \frac{\frac{2 \times 7}{3}}{\frac{5 \times 2}{7 \times 3}} = 1$$

Concluimos que o inverso do quociente entre  $\frac{2}{3}$  e  $\frac{5}{7}$  é igual ao quociente entre  $\frac{5}{7}$  e  $\frac{2}{3}$ .

e.

$$\frac{\frac{0,3}{1,5}}{\frac{2,2}{4,7}} = \frac{0,3}{1,5} \times \frac{4,7}{2,2} = \frac{0,3 \times 4,7}{1,5 \times 2,2}$$

Note-se que, da propriedade expressa em 1.8, resulta, em particular, que se podem simplificar quocientes de racionais cortando fatores comuns ao dividendo e ao divisor, analogamente ao que era já conhecido para frações.

**Exemplo:**

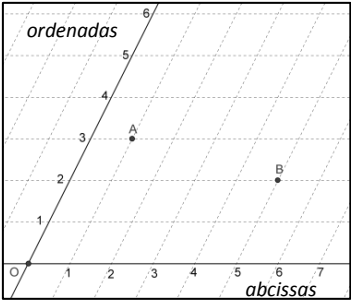
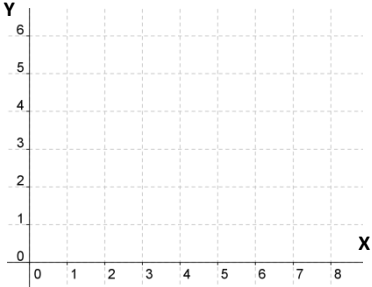
Simplifica o quociente:

$$\frac{1,43 \times 2,7}{35,05 \times 2,7}$$

R.:

$$\frac{1,43 \times 2,7}{35,05 \times 2,7} = \frac{1,43}{35,05} \times \frac{2,7}{2,7} = \frac{1,43}{35,05} \times 1 = \frac{1,43}{35,05}$$

## Organização e Tratamento de Dados OTD5

Descritor	Texto de apoio																		
1.2	<p><b>Exemplo</b>  <i>Considera o referencial cartesiano apresentado abaixo.</i></p> <p>a. Qual dos pontos A e B tem maior valor de ordenada?                      b. Indica as coordenadas dos pontos A e B.</p> <div style="text-align: center;">  </div>																		
1.3	<p><b>Exemplo</b>  <i>Constrói, no referencial cartesiano ortogonal apresentado, o gráfico correspondente aos valores da seguinte tabela.</i></p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>Ponto</th> <th>X</th> <th>Y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A</td> <td>2</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>B</td> <td>3</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>C</td> <td>5</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>D</td> <td>6</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>E</td> <td>8</td> <td>5</td> </tr> </tbody> </table> <div style="text-align: center; margin-top: 10px;">  </div>	Ponto	X	Y	A	2	2	B	3	0	C	5	1	D	6	6	E	8	5
Ponto	X	Y																	
A	2	2																	
B	3	0																	
C	5	1																	
D	6	6																	
E	8	5																	
2.1	<p><b>Exemplo</b>  <i>Sabendo que foram recolhidos 50 dados sobre a modalidade desportiva favorita, completa a tabela.</i></p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>Andebol</th> <th>Basquetebol</th> <th>Ciclismo</th> <th>Equitação</th> <th>Futebol</th> <th>Natação</th> <th>Voleibol</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">6</td> <td style="text-align: center;">10</td> <td style="text-align: center;">7</td> <td></td> <td style="text-align: center;">14</td> <td style="text-align: center;">6</td> <td style="text-align: center;">4</td> </tr> </tbody> </table> <p><b>Exemplo**</b>  <i>Cento e vinte e cinco alunos do 5.º ano responderam ao seguinte inquérito:</i></p> <p><i>A associação de estudantes está a organizar clubes de atividades extracurriculares. Dos clubes apresentados seleciona um e apenas um ao qual gostarias de pertencer.</i></p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 20px;"> <div style="text-align: center;"> <p>Clube de Matemática <input type="checkbox"/></p> <p>Clube de Jornalismo <input type="checkbox"/></p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>Clube de Ambiente <input type="checkbox"/></p> <p>Clube de Desporto <input type="checkbox"/></p> </div> </div>	Andebol	Basquetebol	Ciclismo	Equitação	Futebol	Natação	Voleibol	6	10	7		14	6	4				
Andebol	Basquetebol	Ciclismo	Equitação	Futebol	Natação	Voleibol													
6	10	7		14	6	4													



Um elemento da associação de estudantes estava a organizar os dados numa tabela de frequências absolutas e relativas, mas deixou-a incompleta.  
Preenche os valores em falta.

Clubes	Frequência absoluta	Frequência relativa
Matemática		15,2%
Ambiente	50	40%
Jornalismo		16%
Desporto		
Total	125	

4.1

**Exemplo**

O Pedro tem 10 anos e os seus familiares têm as seguintes idades:  
avó: 65; pai: 41; mãe: 40; irmão: 7.  
Calcula a média das idades dos membros da família do Pedro.

**Exemplo**


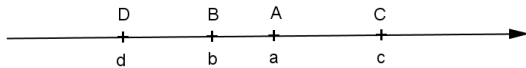
A Beatriz, nos três primeiros testes de Matemática, teve as seguintes classificações: 50%, 52% e 58%.

- Calcula a média das classificações dos testes da Beatriz.
- Sabendo que no primeiro período se realiza apenas mais um teste, calcula o valor máximo que a média da Beatriz pode atingir.
- \*Supondo que a professora não vai ter em conta a pior das quatro classificações, calcula o valor máximo e o valor mínimo que a média da Beatriz pode atingir.

**Exemplo\***

Completa a seguinte lista com um número de 1 a 5, de tal forma que exista uma única moda superior a 2

5, 4, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 3, 1, 5, 5, 3, 2, 4, 2.

Descritor	Texto de apoio
2.5 2.6 2.7 2.8 2.9 2.10	<p>Estes descritores indicam como se devem ordenar dois números racionais representados na reta numérica. Por definição <math>a &gt; b</math> se o ponto <math>A</math> (de abcissa <math>a</math>) pertencer à semirreta de sentido positivo associada a <math>B</math> (de abcissa <math>b</math>), ou seja, se <math>\vec{BA}</math> tiver o mesmo sentido do que a semirreta dos números positivos. Esta condição significa que <math>\vec{BA}</math> contém essa semirreta ou está nela contida; examinado as três possibilidades para a posição da origem relativamente ao pontos <math>A</math> e <math>B</math> conclui-se que, numa representação usual da reta numérica, esta propriedade é equivalente a que <math>A</math> esteja situado entre <math>B</math> e a ponta da seta que indica o sentido positivo.</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>No caso em que a reta numérica é representada com o “sentido da esquerda para a direita” os alunos poderão limitar-se a reconhecer, de forma mais informal, que “<math>a &gt; b</math> se <math>A</math> está à direita de <math>B</math>”.</p> <p><b>Exemplo</b>  <i>Na figura junta está representada a reta numérica e nela estão marcados quatro pontos <math>A, B, C</math> e <math>D</math> de abcissas, respetivamente, <math>a, b, c</math> e <math>d</math>.</i></p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>Completa com os sinais <math>&lt;</math> e <math>&gt;</math> cada uma das expressões seguintes de forma a serem verdadeiras:</p> <p>a. <math>a \dots c</math>      b. <math>a \dots b</math>      c. <math>d \dots c</math>      d. <math>b \dots d</math>      e. <math>c \dots b</math></p> <p><b>Exemplo*</b>  <i>Completa as seguintes afirmações colocando um dos seguintes sinais <math>&lt;</math>, <math>&gt;</math> ou <math>=</math>.</i></p> <p>a. Sendo <math>a &lt; 0</math>, <math>b &lt; 0</math> e <math> a  &lt;  b </math>, então <math>a \dots b</math>.          b. Sendo <math>a &gt; 0</math>, <math>b &gt; 0</math> e <math> a  &lt;  b </math>, então <math>a \dots b</math>.          c. Sendo <math>a &lt; 0</math>, <math>b &lt; 0</math> e <math> a  =  b </math>, então <math>a \dots b</math>.          d. Sendo <math>a &gt; 0</math>, <math>b &gt; 0</math> e <math> a  =  b </math>, então <math>a \dots b</math>.          e. Sendo <math>a &lt; 0</math>, <math>b &gt; 0</math> então <math>a \dots b</math>.          f. Sendo <math>a &lt; 0</math> e <math>a &gt; b</math> então <math> a  \dots  b </math>.          g. Sendo <math>a &gt; 0</math> e <math>a &lt; b</math> então <math> a  \dots  b </math>.</p>

**Exemplo**

Completa as seguintes afirmações colocando um dos seguintes sinais  $<$ ,  $>$  ou  $=$ .

- a.  $0,2 \dots 0,19$
- b.  $-3 \dots -5$
- c.  $\frac{2}{3} \dots \frac{3}{4}$
- d.  $-7 \dots -2$
- e.  $-\frac{2}{3} \dots -\frac{3}{4}$
- f.  $-0,15 \dots -\frac{3}{50}$

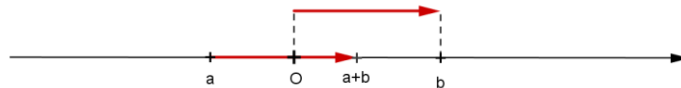
3.1  
3.2  
3.3

A introdução de segmentos de reta orientados é referida nos descritores 3.1 e 3.2 com vista à definição de soma de dois números racionais utilizando a reta numérica e à posterior interpretação geométrica também da diferença de dois destes números.

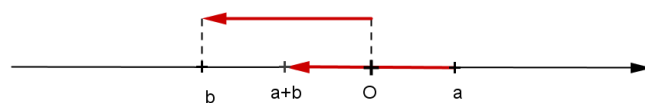
No descritor 3.3 estende-se a definição de adição de racionais não negativos (NO3-10.1 e NO3-10.2) a todos os racionais, estabelecendo que:

- para dois números racionais não nulos  $a$  e  $b$ , representados pelos pontos  $A$  e  $B$  da reta numérica, se identifica  $a + b$  como a abcissa da outra extremidade do segmento orientado de origem em  $A$  e de comprimento e orientação de  $[O, B]$ .

- Exemplo em que  $a < 0, b > 0$  e  $a + b > 0$



- Exemplo em que  $a > 0, b < 0$  e  $a + b < 0$



- para um número racional  $a$  não nulo e  $b$  nulo, se identifica  $a + b$  como a abcissa de  $A$ .

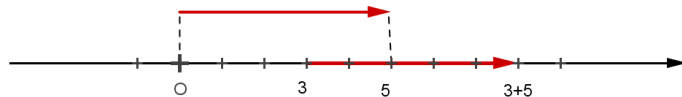
Pode começar-se por considerar exemplos que apenas envolvam números inteiros. No caso dos números racionais não necessariamente inteiros poderá utilizar-se uma reta numérica munida de escala apropriada ou inserida de forma conveniente num quadriculado, tal como se sugeriu no 1.º ciclo a propósito das operações com números racionais positivos (cf. Caderno de Apoio NO2-11.1,11.2 e NO3-12.1,12.2,12.3).

**Exemplo**

Constrói geometricamente o ponto que representa na reta numérica a soma dos números racionais:

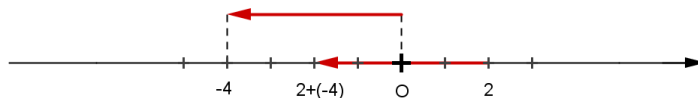
a. 3 e 5

R.:



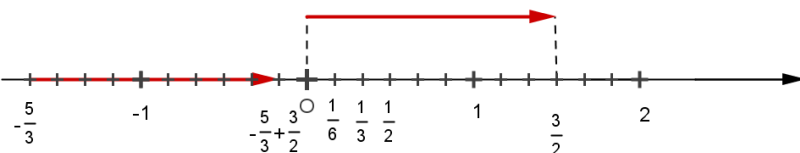
b. 2 e  $-4$

R.:



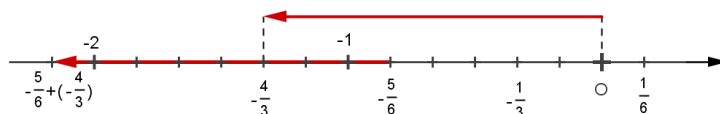
c.  $-\frac{5}{3}$  e  $\frac{3}{2}$

R.:



d.  $-\frac{5}{6}$  e  $-\frac{4}{3}$

R.:

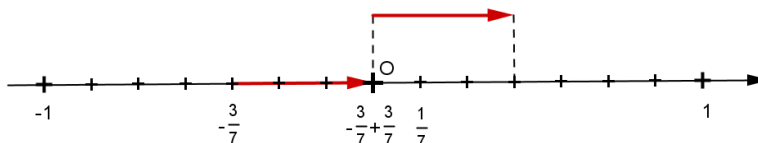


Como fica patente na figura, a soma  $-\frac{5}{6} + \left(-\frac{4}{3}\right)$  pode ser traduzida por uma fração de denominador 6, ou seja,  $-\frac{5}{6} + \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{13}{6}$ .

Para dividir a unidade em seis partes iguais, basta dividi-la em três partes iguais (terços) e depois cada terço em duas partes iguais (dois sextos). Então se marcarmos na reta numérica pontos a distâncias da origem múltiplas de  $\frac{1}{6}$ , cada um dos números  $-\frac{5}{6}$  e  $-\frac{4}{3}$  fica representado por um desses pontos. A respetiva soma, obtida por justaposição de segmentos de comprimento  $\frac{1}{6}$ , pode portanto ser representada por uma fração de denominador 6.

e.  $-\frac{3}{7}$  e  $\frac{3}{7}$

R.:



**Exemplo\***

a. Considera o número racional positivo  $b$  representado na reta numérica.

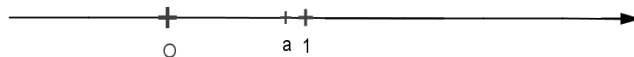


Representa na reta numérica a soma de 3 com  $b$ :

R.:



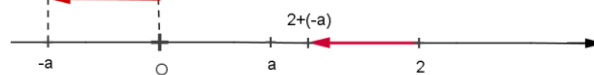
b. Considera o número racional positivo  $a$  representado na reta numérica.



Representa na reta numérica as seguintes somas:

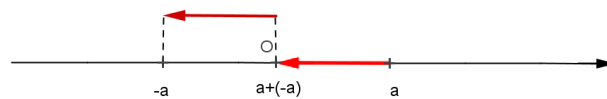
$b_1. 2 + (-a)$

R.:



$b_2. a + (-a)$

R.:



3.4  
3.5

Estas duas propriedades, depois de reconhecidas geometricamente, são fundamentais para fornecer um método algébrico que permita, no 2.º ciclo, o cálculo da soma e da diferença de dois números racionais.

Note-se que as fórmulas fornecidas nos descritores NO5-1.4 e NO5-1.5

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + c \times b}{b \times d} \text{ e } \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \times d - c \times b}{b \times d}$$

só no 3.º ciclo poderão ser generalizadas ao caso em que  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  são números inteiros quaisquer, uma vez que é então que se definem quocientes envolvendo números negativos.

Assim, para calcular a soma de dois números racionais de sinais contrários, por exemplo  $\left(-\frac{4}{7}\right) + \frac{3}{21}$ , os alunos poderão:

- reduzir ao mesmo denominador o valor absoluto de ambas as frações, o que permitirá em particular compará-los:

$$\left(-\frac{4}{7}\right) + \frac{3}{21} = \left(-\frac{12}{21}\right) + \frac{3}{21} :$$

- aplicar a propriedade enunciada neste descritor e concluir o cálculo:

$$\text{Como } \frac{12}{21} > \frac{3}{21}, \left(-\frac{12}{21}\right) + \frac{3}{21} = -\left(\frac{12}{21} - \frac{3}{21}\right) = -\frac{9}{21} = -\frac{1}{3} ;$$

Tal como se referiu mais acima, não se poderá, a este nível, escrever

$$\left(-\frac{4}{7}\right) + \frac{3}{21} = \left(-\frac{12}{21}\right) + \frac{3}{21} = \frac{-12+3}{21} = \frac{-9}{21} = -\frac{9}{21} = -\frac{1}{3}$$

uma vez que o quociente  $\frac{-12+3}{21} = \frac{-9}{21}$  não se encontra sequer definido.

Para adicionar dois números racionais com o mesmo sinal, o processo é mais simples uma vez que não é necessário efetuar qualquer comparação. Por exemplo, para calcular

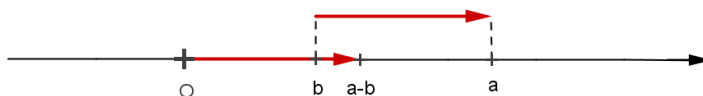
$$\left(-\frac{4}{7}\right) + \left(-\frac{3}{21}\right), \text{ bastará fazer}$$

$$\left(-\frac{4}{7}\right) + \left(-\frac{3}{21}\right) = -\left(\frac{4}{7} + \frac{3}{21}\right) = -\left(\frac{12}{21} + \frac{3}{21}\right) = -\frac{15}{21}.$$

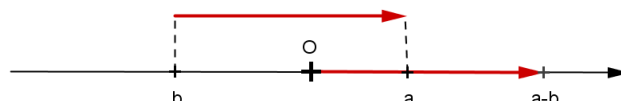
4.1

A diferença  $a - b$  é definida como o número racional cuja soma com  $b$  é igual a  $a$ , ou seja, tal que  $(a - b) + b = a$ , ou, em alternativa,  $b + (a - b) = a$ . Utilizando esta segunda formulação, os alunos podem considerar o segmento orientado de origem  $B$  (de abcissa  $b$ ) e extremidade  $A$  (de abcissa  $a$ ) e representar um segmento orientado de origem em 0 mas com a mesma orientação e comprimento de  $[B, A]$ . A sua extremidade será o ponto de abcissa  $a - b$ .

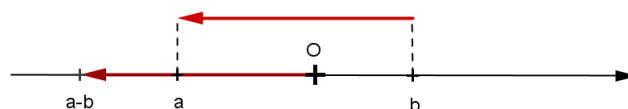
- Exemplo em que  $a > b$  e  $b > 0$



- Exemplo em que  $a > b$  e  $b < 0$



- Exemplo em que  $a < 0 < b$

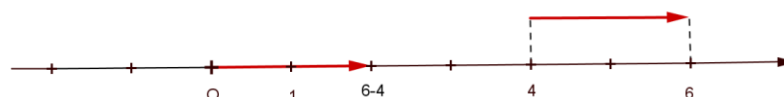


### Exemplo

Constrói geometricamente os pontos que representam, na reta numérica, as seguintes diferenças:

a.  $6 - 4$

R.:



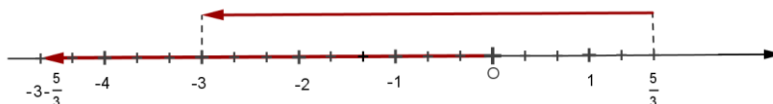
b.  $4 - 6$

R.:



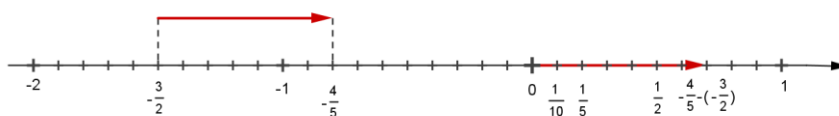
c.  $-3 - \frac{5}{3}$

R.:



d.  $-\frac{4}{5} - (-\frac{3}{2})$

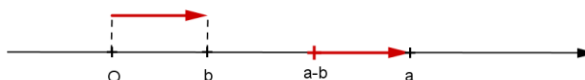
R.:



**Observação**

Como foi referido, é possível entender  $a - b$  como o número racional  $a$  que se deve adicionar  $b$  para obter  $a$ , ou seja, tal que  $(a - b) + b = a$ . Nesse sentido, para representar na reta numérica o número racional  $a - b$ , podemos fazer coincidir a extremidade de um segmento orientado com o comprimento e orientação de  $[0, B]$  em  $A$  e ver em que ponto fica a origem, a qual representa exatamente a diferença, já que, por esta construção, a soma do valor obtido com  $b$  é igual a  $a$ .

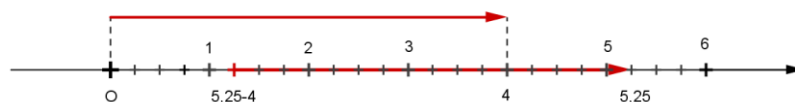
- Exemplo em que  $0 < b < a$



**Exemplo**

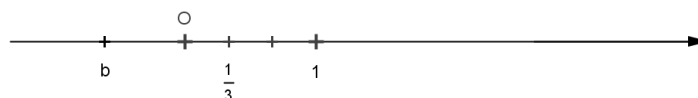
Constrói geometricamente o ponto que representa na reta numérica a diferença entre os números racionais 5,25 e 4.

R.:



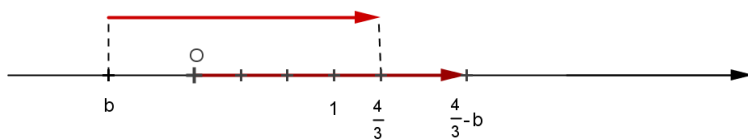
**Exemplo\***

Considera o número racional negativo  $b$  representado na reta numérica.

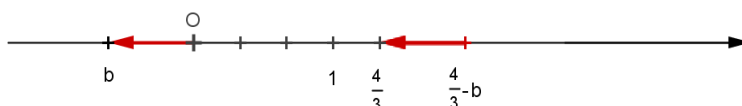


Representa na reta numérica  $\frac{4}{3} - b$ .

R.:



Ou, utilizando a observação, para representar  $\frac{4}{3} - b$  devemos fazer coincidir a extremidade de um segmento orientado com o comprimento e orientação de  $[O, B]$  (sendo  $B$  o ponto de abscissa  $b$ ) no ponto de abscissa  $\frac{4}{3}$  e ver em que ponto fica a origem, a qual representa exatamente a diferença.

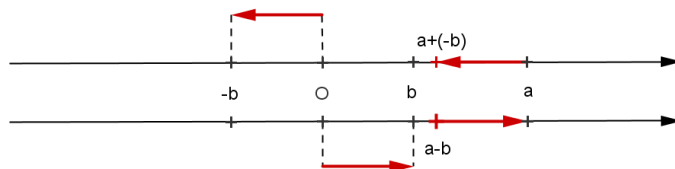


**Exemplo\*\***

Considera dois números racionais  $a$  e  $b$ . Representa geometricamente  $a - b$  para diferentes valores de  $a$  e  $b$  e enuncia uma regra que preveja o sinal da diferença a partir dos valores de  $a$  e  $b$ .

4.2  
4.3  
4.4

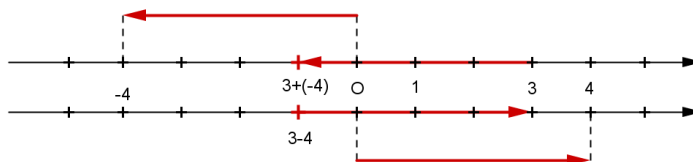
Dados dois números racionais  $a$  e  $b$ , pode verificar-se geometricamente que  $a - b$  é igual à soma de  $a$  com o simétrico de  $b$ , ou seja, que  $a - b = a + (-b)$ . Utiliza-se, na representação de  $a - b$ , a interpretação considerada na observação feita na página anterior.



**Exemplo\***

Representa geometricamente os pontos que representam na reta numérica  $3 + (-4)$  e  $3 - 4$  e explica por que razão correspondem ao mesmo ponto.

R.:



Os segmentos orientados que unem o ponto de abscissa 3 ao ponto que representa o resultado de cada uma das operações têm o mesmo comprimento, já que correspondem a números simétricos um do outro. Como os segmentos orientados têm orientações simétricas e, num dos casos, o ponto de abscissa 3 é a origem e, no outro, a extremidade, esses resultados correspondem ao mesmo ponto da reta numérica.



Note-se que utilizando as considerações feitas em 3.4 e 3.5, o descritor 4.2 fornece um método prático para o cálculo da diferença de dois quaisquer números racionais, por conversão numa soma.

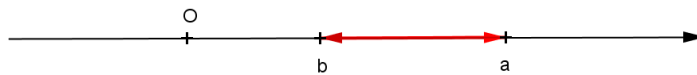
Por exemplo, para calcular  $\frac{2}{3} - \frac{7}{6}$ , os alunos podem considerar que se trata da soma  $\frac{2}{3} + \left(-\frac{7}{6}\right)$  e concluir o cálculo tal como indicado a propósito dos descritores 3.4 e 3.5:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} - \frac{7}{6} &= \frac{2}{3} + \left(-\frac{7}{6}\right) = \frac{4}{6} + \left(-\frac{7}{6}\right) = -\left(\frac{7}{6} - \frac{4}{6}\right) && \text{(porque } \frac{7}{6} > \frac{4}{6} \text{)} \\ &= -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

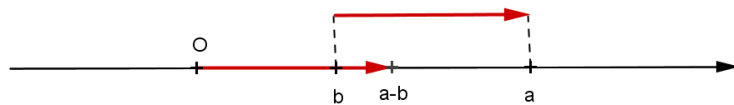
4.5 Podemos reconhecer geometricamente que a medida da distância entre dois pontos de abscissa  $a$  e  $b$  é igual ao módulo da respetiva diferença.

4.6

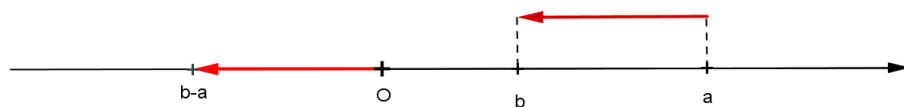
Na primeira figura estão representados dois pontos de abscissa  $a$  e  $b$ , com  $a > b$  e o segmento de reta (a vermelho) cujo comprimento é igual à distância entre os pontos.



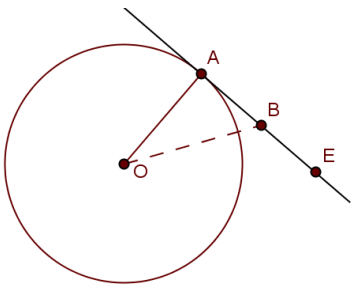
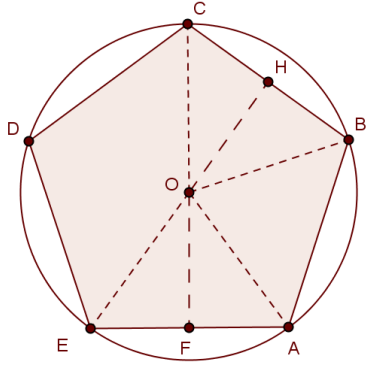
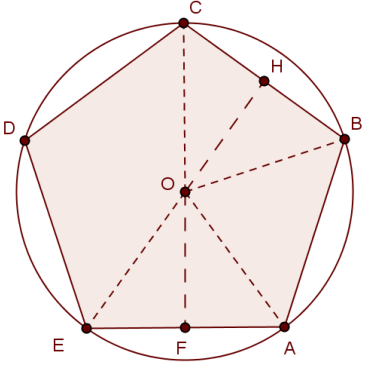
Esta distância é igual à distância da origem ao ponto que representa  $a - b$



e à distância da origem ao ponto que representa  $b - a$ .

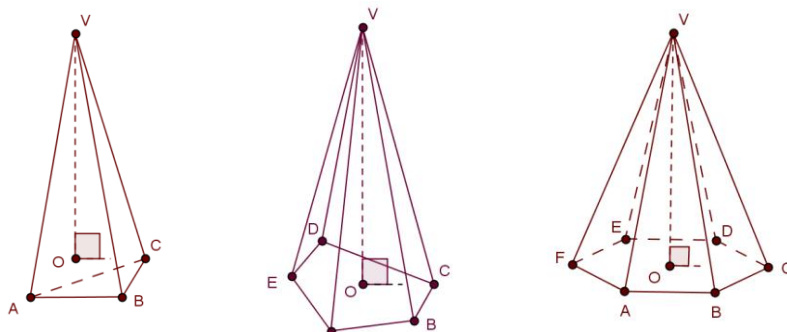


Por definição de módulo, as medidas destas duas distâncias são dadas respetivamente por  $|a - b|$  e  $|b - a|$ , sendo ambas iguais à distância entre os pontos de abscissas  $a$  e  $b$ .

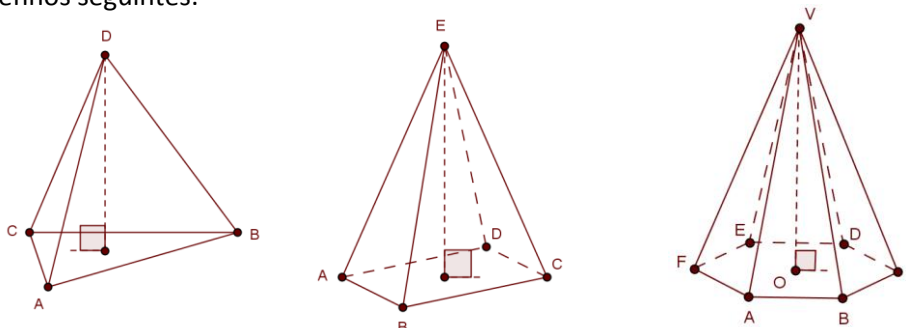
Descritor	Texto de apoio
1.4	<p><b>Exemplo*</b>  Na figura junta está representada uma circunferência de centro <math>O</math> e a reta <math>AE</math> perpendicular ao raio em <math>A</math>.</p>  <p>a. Considera <math>B</math> um ponto qualquer da reta <math>AE</math> distinto de <math>A</math>. Justifica que <math>\overline{OB} &gt; \overline{OA}</math>.</p> <p>b. Justifica que <math>B</math> é um ponto exterior ao círculo de centro <math>O</math> e raio <math>[OA]</math>.</p> <p>c. Justifica que <math>A</math> é o único ponto em que a reta <math>AE</math> intersesta o círculo.</p>
1.7	<p><b>Exemplo*</b>  Na figura está representado um pentágono regular inscrito na circunferência de centro <math>O</math>. O ponto <math>F</math> é o pé da perpendicular tirada de <math>O</math> para <math>[EA]</math> e o ponto <math>H</math> é o pé da perpendicular tirada de <math>O</math> para <math>[BC]</math>.</p>  <p>a. Justifica que <math>\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OE}</math>.</p> <p>b. Justifica que os triângulos <math>[OEA]</math> e <math>[OBC]</math> são iguais, assim como os ângulos <math>OEA</math> e <math>OBC</math>.</p> <p>c. Justifica que são iguais os ângulos <math>EOF</math> e <math>BOH</math>.</p> <p>d. Utiliza o caso ALA de igualdade de triângulos para justificar que os triângulos <math>[EOF]</math> e <math>[BOH]</math> são iguais e que <math>\overline{OF} = \overline{OH}</math>.</p> <p>e. Justifica que os apótemas de um dado polígono regular são todos iguais.</p> <p><b>Exemplo*</b>  Na figura está representado um pentágono regular inscrito na circunferência de centro <math>O</math>. O ponto <math>F</math> é o pé da perpendicular tirada de <math>O</math> para <math>[EA]</math> e o ponto <math>H</math> é o pé da perpendicular tirada de <math>O</math> para <math>[BC]</math>.</p>  <p>a. Justifica que <math>\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OE}</math>.</p> <p>b. Justifica que os triângulos <math>[OEA]</math> e <math>[OBC]</math> têm áreas iguais.</p> <p>c. Tendo em conta o resultado da alínea anterior, justifica que os apótemas de um dado polígono regular são todos iguais.</p>

2.3  
2.7

**Observação:** Certos autores definem «pirâmide reta» como uma pirâmide cujas arestas laterais são iguais, como nos exemplos seguintes:



Esta definição não é, no entanto, consensual. Em várias obras entende-se por «pirâmide reta» uma pirâmide tal que o segmento de reta que liga o vértice ao centro de massa da base é perpendicular ao plano que contém a base, como se ilustra nos desenhos seguintes:



Por esta razão optou-se por não fornecer, nas Metas Curriculares, uma definição de «pirâmide reta».

Observe-se ainda que, com a primeira definição, uma pirâmide é reta se e apenas se existir uma circunferência que contém todos os vértices da base e se o segmento de reta que liga o vértice ao centro da circunferência for perpendicular à base (ver uma justificação deste facto no Caderno de Apoio do 3.º Ciclo, GM9-8.1). Com esta definição, as pirâmides retas são as pirâmides que se podem inscrever em cones retos.

Quanto à segunda definição, notemos que a noção de «centro de massa» de uma figura, em toda a sua generalidade, não pode ser apresentada no ensino Básico e Secundário uma vez que utiliza noções de cálculo integral. No entanto, em figuras limitadas que possuam pelo menos dois eixos de simetria concorrentes num ponto  $P$ , é fácil ver qualquer outro eixo de simetria passa igualmente por  $P$  e que  $P$  é o centro de massa da figura.

Com qualquer uma destas definições, uma pirâmide regular é sempre uma pirâmide reta.

3.1

**Exemplo**

*Imagina um prisma e uma pirâmide cujas bases são polígonos com 100 lados. Indica o número de arestas laterais e totais do prisma e da pirâmide e explica o teu raciocínio.*

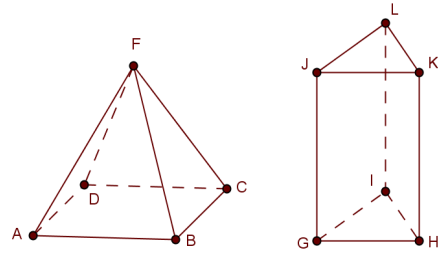
3.2	<p><b>Exemplo*</b></p> <p>a. Indica uma expressão que permita determinar o número de vértices de um prisma dado o número <math>n</math> de lados da base e explica o teu raciocínio.</p> <p>b. Indica uma expressão que permita determinar o número de vértices de uma pirâmide dado o número <math>m</math> de lados da base e explica o teu raciocínio.</p>
3.4.	<p><b>Exemplo</b></p> <p>Na figura está representado um octaedro. Indica o número de faces, arestas e vértices e verifica a validade da relação de Euler.</p> <div data-bbox="1018 439 1302 734" data-label="Image"> </div> <p><b>Exemplo*</b></p> <p>Considera um prisma e uma pirâmide em que o polígono da base tem 100 vértices.</p> <p>a. Indica quantas arestas e quantas faces têm o prisma e a pirâmide e explica o teu raciocínio.</p> <p>b. Soma o número de faces com o número de vértices em cada um dos poliedros e compara com o respetivo número de arestas. O que concluis?</p>
4.1	<p><b>Exemplo (3.1,3.2)</b></p> <p>Considera a figura junta onde estão representados um prisma triangular e uma pirâmide quadrangular.</p> <div data-bbox="775 1093 1267 1366" data-label="Image"> </div> <p>a. Indica o número de arestas e de vértices de cada um dos sólidos.</p> <p>b. Indica que relação existe entre o número de arestas do prisma e o número de arestas da respetiva base.</p> <p>c. Indica que relação existe entre o número total de vértices da pirâmide e o número de vértices da respetiva base.</p> <p><b>Exemplo* (3.1,3.2)</b></p> <p>Um prisma e uma pirâmide têm ambos 24 arestas.</p> <p>a. Quantas faces laterais tem o prisma?</p> <p>b. Quantos vértices tem o mesmo prisma?</p> <p>c. Quantas faces laterais tem a pirâmide?</p> <p><b>Exemplo** (3.1,3.2)</b></p> <p>Uma pirâmide tem o mesmo número de arestas de um prisma.</p> <p>a. Dá exemplos de várias pirâmides e prismas com esta propriedade.</p> <p>b. Qual o menor número de lados que pode ter o polígono da base de cada um deles?</p>

**Exemplo (3.4)**

Considera a figura junta onde estão representados um prisma triangular e uma pirâmide quadrangular.

a. Completa a tabela junta.

FACES	VÉRTICES	ARESTAS	F+V
F	V	A	

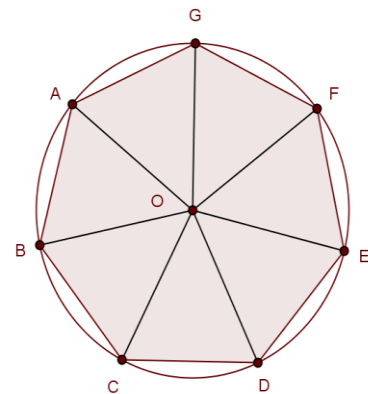
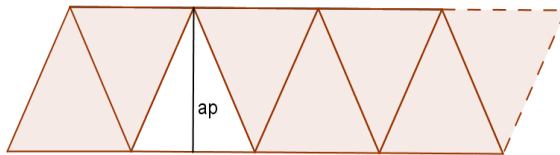


b. Que relação existe entre o número de arestas e a soma do número de faces com o número de vértices?

5.4

**Exemplo**

Na figura ao lado está representado um heptágono regular inscrito numa circunferência e dividido em triângulo isósceles. Construindo um paralelogramo com estes triângulos aos quais se juntou um, obtém-se a figura junta.



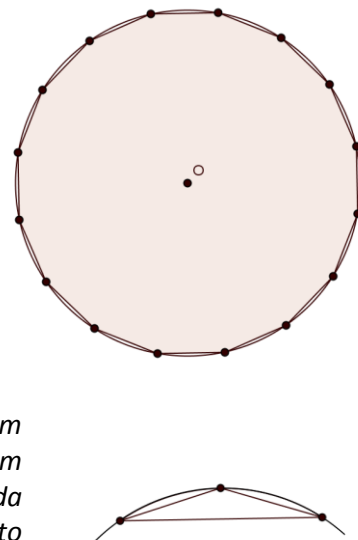
- a. Constrói, a partir do paralelogramo, um retângulo que tenha área igual à do heptágono sendo um dos lados igual ao semiperímetro e outro igual ao apótema do heptágono. (Sugestão: Decompõe os triângulos das extremidades em dois triângulos iguais, traçando as respectivas alturas, iguais ao apótema do heptágono.)
- b. Conclui que a área do heptágono é igual ao produto do semiperímetro pelo apótema.

5.5

**Exemplo**

Na figura ao lado está representado um polígono regular de 16 lados inscrito numa circunferência de centro O raio r cm.

- a. Considerando que o perímetro do polígono é aproximadamente igual ao perímetro do círculo e que o apótema do polígono é aproximadamente igual ao raio do círculo, determina uma expressão para um valor aproximado da área do polígono envolvendo apenas  $\pi$  e r.
- b. Considera que, na alínea a., em vez de um polígono de 16 lados tínhamos utilizado um polígono regular com 32 lados, substituindo cada lado do polígono anterior por dois como descrito na figura ao lado.



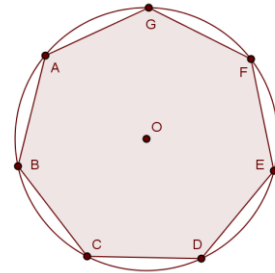
- b<sub>1</sub>. Pensas que o valor obtido em a. é uma melhor aproximação da área do polígono de 32 lados ou do polígono de 16 lados? Porquê?*
- b<sub>2</sub>. E o perímetro e o raio do círculo parecem melhores aproximações respetivamente do perímetro e do apótema do polígono de 32 lados ou de 16 lados?*
- c. Que fórmula deduzes para a área do círculo supondo que pode ser confundido com um polígono regular nele inscrito com um número suficientemente grande de lados?*

6.1

**Exemplo (5.1)**

*Na figura está representado um heptágono regular inscrito numa circunferência. Sabe-se que o lado do heptágono mede 2 cm.*

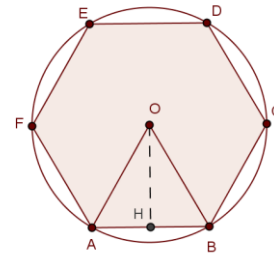
- Calcula o respetivo perímetro.*
- Tomando o perímetro do heptágono como valor aproximado do perímetro do círculo, determina um valor aproximado do raio da circunferência.*



**Exemplo\***

*Na figura está representado um hexágono regular inscrito numa circunferência de centro O e raio 2 cm.*

- Decompõe o hexágono em triângulos em que um dos vértices é O e o lado oposto é um dos lados do polígono.*
- Mostra que  $\widehat{AOB} = 60^\circ$  e determina a amplitude dos ângulos OAB e ABO.*
- Como classificas esses triângulos quanto aos lados? Justifica.*
- Supondo que a altura  $\overline{OH}$  do triângulo [ABO] mede aproximadamente 1,7 cm, determina valores aproximados da área do triângulo [ABO] e do hexágono [ABCDEF].*

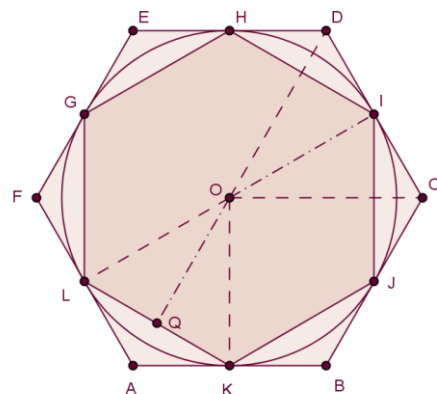


**Exemplo\* (1.3, 1.6, 5.1, 5.4, 5.5)**

*Na figura junta estão representados dois hexágonos regulares, um inscrito e o outro circunscrito a uma dada circunferência.*

*Sabe-se que o raio da circunferência mede 2 cm. Sabe-se também que  $\overline{OD} = 2,3$  cm e  $\overline{OQ} = 1,7$  cm, aproximadamente.*

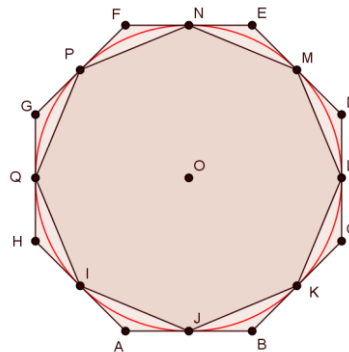
- Determina um valor aproximado da área do hexágono inscrito na circunferência começando por calcular um valor aproximado da área do triângulo equilátero [LOK].*
- Determina um valor aproximado da área do hexágono circunscrito à circunferência começando por calcular um valor aproximado da área do triângulo [DOC].*
- Tendo em conta as alíneas anteriores, aproximadamente entre que valores está compreendida a área do círculo?*
- Determina a área do círculo tomando 3,1416 para valor aproximado de  $\pi$  e compara o valor obtido com a conclusão da alínea c.*



**Exemplo\*** (1.3,1.6,5.1,5.3)

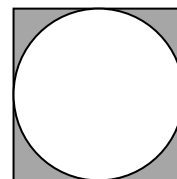
Na figura está representada uma circunferência de centro  $O$  e dois octógonos, um inscrito e outro circunscrito a essa circunferência.

- Sabendo que o lado do polígono  $[ABCDEFGH]$  mede aproximadamente 2,2 cm, determina um valor aproximado do respetivo perímetro.
- Determina o perímetro do octógono inscrito na circunferência sabendo que o lado mede 2 cm.
- Tomando o perímetro do octógono inscrito como valor aproximado do perímetro do círculo, determina um valor aproximado do raio da circunferência.
- Tomando o perímetro do octógono circunscrito como valor aproximado do perímetro do círculo, determina um valor aproximado do raio da circunferência.
- Supondo que o raio da circunferência mede aproximadamente 2,6 cm, obtém valores aproximados por excesso e por defeito de  $\pi$  utilizando os resultados obtidos nas alíneas a. e b.



**Exemplo** (5.5)

Na figura está representado um quadrado de área  $4 \text{ cm}^2$  e nele inscrito um círculo. Determina um valor aproximado da área da região sombreada.

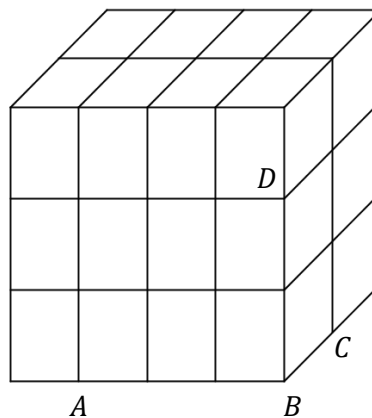


7.1  
7.2

**Exemplo**

Na figura está representado um cubo cuja aresta mede 1 dm e que foi dividido em paralelepípedos retângulos iguais tal como a figura sugere.

- Em quantos paralelepípedos está dividido o cubo?
- Indica o volume do cubo e de cada um dos paralelepípedos em que ficou dividido.
- Quais as dimensões de cada um dos paralelepípedos?
- Como podes calcular o volume de cada paralelepípedo a partir das respetivas dimensões?
- \* Sabe-se que os pontos  $A, B, C$  e  $D$  são vértices de um paralelepípedo  $\mathcal{P}$ .
  - Calcula, sem os contar, em quantos paralelepípedos está dividido e determina o volume de  $\mathcal{P}$  sem utilizar a fórmula.
  - Indica as dimensões de  $\mathcal{P}$  e explica como se pode calcular o respetivo volume a partir desses valores.

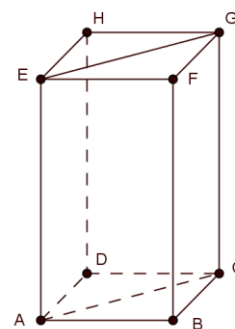


7.3  
7.4  
7.5

**Exemplo\***

Na figura está representado um paralelepípedo retângulo de dimensões  $a, b$  e  $c$  decomposto em dois prismas triangulares.

- Determina o volume do paralelepípedo.
- Admitindo que os dois prismas triangulares são iguais, determina o volume de cada um deles.
- Calcula a área da base de um dos prismas e do paralelepípedo.
- Deduz das alíneas anteriores uma fórmula para o cálculo do volume do prisma conhecida a área da base e a altura.

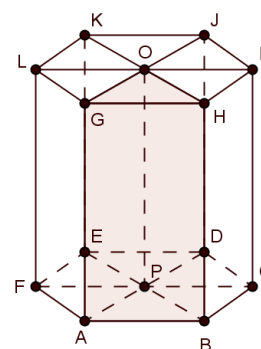


No caso em que o triângulo da base do prisma não é retângulo, pode considerar-se em primeiro lugar, um prisma cuja base é um paralelogramo que duplica o triângulo e utilizar-se as decomposições conhecidas (GM5-4.5) que o transformam num retângulo equivalente para obter um paralelepípedo retângulo com o mesmo volume que esse prisma. Deste modo, conclui-se, no caso geral, que a medida do volume de um prisma triangular reto, em unidades cúbicas, é igual ao produto da medida da área da base, em unidades quadradas, pela medida da altura.

**Exemplo**

Considera um prisma hexagonal regular decomposto em prismas triangulares regulares tal como ilustra a figura.

- Sabendo que a área da base de cada um dos prismas triangulares mede  $6 \text{ cm}^2$  e que a respetiva altura mede  $8 \text{ cm}$ , determina o volume de cada um dos prismas triangulares.
- Determina a área da base do prisma hexagonal.
- Determina o volume do prisma hexagonal de duas formas: tendo em conta a decomposição em prismas triangulares e utilizando diretamente a fórmula.

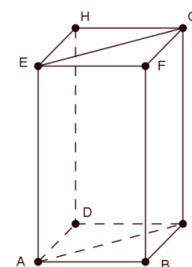


8.1

**Exemplo**

Na figura está representado um paralelepípedo retângulo decomposto em dois prismas triangulares.

- Sabendo que o volume do paralelepípedo é igual a  $17 \text{ cm}^3$ , indica o volume de cada um dos prismas triangulares.
- Supondo que a altura do paralelepípedo mede  $4,25 \text{ cm}$ , qual a área da base de cada um dos prismas triangulares?



**Exemplo\* (7.6)**

Na figura está representado um cilindro de volume igual a  $30 \text{ cm}^3$ . Determina um valor aproximado da altura do cilindro sabendo que o diâmetro da base mede  $5 \text{ cm}$ .



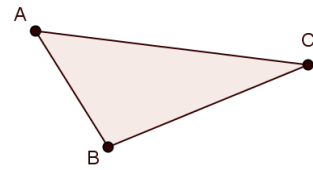


9.2  
9.3

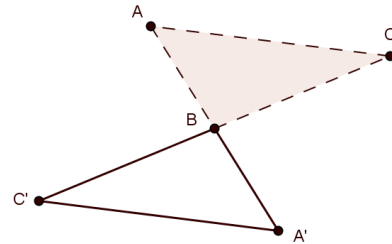
**Exemplo**

Considera o triângulo  $[ABC]$  representado na figura.

- Constrói os transformados  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  respetivamente dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  pela reflexão central de centro  $B$ .
- Justifica que o triângulo  $[A'B'C']$  obtido em a. é igual ao triângulo  $[ABC]$ .
- Justifica que a reflexão central de centro em  $B$  mantém a distância entre os pontos  $A$  e  $C$ .



R.: a. Por definição,  $B$  é o ponto médio do segmento  $[AA']$ . Para construir  $A'$  basta pois marcar na reta  $AB$  o ponto distinto de  $A$  à mesma distância de  $B$  que  $A$ . O ponto  $C'$  constrói-se de forma análoga. A imagem de  $B$  é por definição o próprio  $B$ , ou seja  $B'$  coincide com  $B$ .

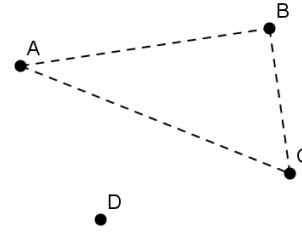


- Por construção,  $\overline{AB} = \overline{A'B}$  e  $\overline{CB} = \overline{C'B}$ . Por outro lado, os ângulos  $ABC$  e  $A'BC'$  são verticalmente opostos, logo iguais. Assim, pelo caso LAL, podemos afirmar que os triângulos  $[ABC]$  e  $[A'B'C']$  são iguais.
- Os lados  $[AC]$  e  $[A'C']$  são iguais porque se opõem a ângulos iguais em triângulos iguais.

**Exemplo**

Considera o triângulo de vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  e um ponto  $D$  distinto de  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

- Constrói as imagens de  $A$ ,  $B$  e  $C$  pela reflexão central de centro  $D$  e designa-as respetivamente por  $P$ ,  $Q$  e  $R$ .
- Completa as seguintes igualdades, utilizando vértices do triângulo  $[ABC]$ :  
 $\overline{PQ} = \dots\dots$ ;  $\overline{PR} = \dots\dots$ ;  $\overline{QR} = \dots\dots$
- Utilizando o critério de igualdade de ângulos, completa as seguintes afirmações utilizando apenas as letras  $P$ ,  $Q$  e  $R$ :  
O ângulo  $ABC$  é igual ao ângulo ..... e o ângulo ..... é igual ao ângulo  $BCA$ .

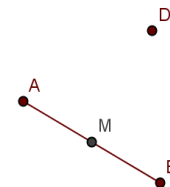


9.5  
9.7

**Exemplo\*\***

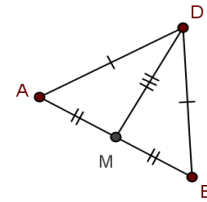
Na figura está representado um segmento de reta  $[AB]$ , o respetivo ponto médio  $M$  e um ponto  $D$  não pertencente à reta  $AB$ , tal que  $\overline{AD} = \overline{BD}$ .

- Prova que os triângulos  $[AMD]$  e  $[BMD]$  são iguais.
- Justifica que os ângulos  $AMD$  e  $BMD$  são iguais e ambos retos.
- Justifica que a reta  $DM$  é a mediatriz de  $[AB]$ .



R.: a. Pelo caso LLL, prova-se que os triângulos  $[AMD]$  e  $[BMD]$  são iguais pois, como  $M$  é ponto médio de  $[AB]$ , então  $\overline{AM} = \overline{MB}$ ,  $[MD]$  é um lado comum aos dois triângulos e sabe-se que  $\overline{AD} = \overline{BD}$ .

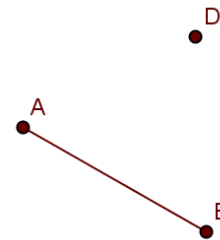
- b. Os ângulos  $AMD$  e  $BMD$  opõem-se a lados iguais  $\overline{AD}$  e  $\overline{BD}$  de triângulos iguais, logo são também iguais. Como são suplementares, ou seja, a sua soma é um ângulo raso, são ambos retos.
- c. A reta  $DM$  é a mediatriz de  $[AB]$  pois é perpendicular a  $[AB]$  no ponto médio  $M$ .



**Exemplo\*\***

Na figura está representado um segmento de reta  $[AB]$  e um ponto  $D$  não colinear com  $A$  e  $B$  e que pertence à mediatriz de  $[AB]$ .

- a. Considera o ponto médio  $M$  de  $[AB]$ . Justifica que os ângulos  $AMD$  e  $BMD$  são iguais.
- b. Justifica que os triângulos  $[AMD]$  e  $[BMD]$  são iguais.
- c. Justifica que  $\overline{AD} = \overline{BD}$ .



- R.: a. A mediatriz de um segmento de reta é a reta perpendicular ao segmento de reta no seu ponto médio, logo  $M$  pertence à mediatriz. O ponto  $D$  também pertence à mediatriz pelo que  $MD$  é a mediatriz de  $[AB]$  e os ângulos  $AMD$  e  $BMD$  são ambos retos, logo iguais.
- b. Pelo caso LAL, prova-se que os triângulos  $[AMD]$  e  $[BMD]$  são iguais pois  $\overline{AM} = \overline{MB}$ ,  $[MD]$  é comum aos dois triângulos e  $\widehat{AMD} = \widehat{BMD}$ .
- c.  $\overline{AD} = \overline{BD}$  porque são lados que se opõem a ângulos iguais de triângulos iguais.

**Exemplo\***

Desenha um segmento de reta  $[AB]$  e constrói a respetiva mediatriz utilizando régua e compasso. Justifica o procedimento utilizado.

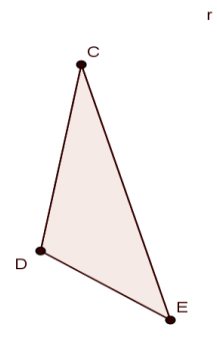
9.10

Não se pede para reconhecer que as reflexões axiais preservam as distâncias entre pontos, pelo que, no primeiro exemplo, os alunos poderão utilizar este resultado para concluir o que se pede. No segundo exemplo, correspondente a um nível de desempenho elevado, apresenta-se um caminho possível para provar a propriedade expressa neste descritor para dois pontos em semiplanos opostos relativamente ao eixo de reflexão (cf. também o Texto Complementar de Geometria).

**Exemplo\***

Na figura junta está representado um triângulo  $[CDE]$  e uma reta  $r$ .

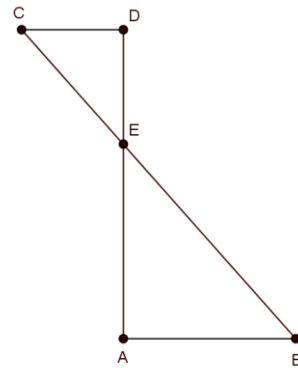
- a. Constrói os transformados  $C', D'$  e  $E'$  respetivamente, de cada um dos vértices  $C, D$  e  $E$  do triângulo na reflexão axial de eixo  $r$ .
- b. Prova que o triângulo  $[C'D'E']$  é igual ao triângulo  $[CDE]$ .



**Exemplo\*\***

Na figura seguinte,  $AB$  e  $CD$  são perpendiculares a  $DA$  e o ponto  $E$  é a interseção dos segmentos de reta  $[AD]$  e  $[CB]$ .

- Constrói os pontos  $B'$  e  $C'$ , imagens respectivas dos pontos  $B$  e  $C$  pela reflexão de eixo  $AD$ .
- Mostra que os triângulos  $[CDE]$  e  $[C'DE]$  são iguais e justifica que os ângulos  $DEC$  e  $DEC'$  são iguais, assim como os segmentos  $[CE]$  e  $[C'E]$ .
- O que dizer dos triângulos  $[BAE]$  e  $[B'AE]$ , dos ângulos  $BEA$  e  $B'EA$  e dos lados  $B'E$  e  $BE$ ?
- Justifica que  $\overline{CB} = \overline{C'B'}$  explicando por que é que os pontos  $C'$ ,  $E$  e  $B'$  estão alinhados.



R.: a. Por definição, a reta  $AD$  é a mediatriz do segmento de reta  $[CC']$ . Logo, para construir  $C'$  basta marcar na reta  $CD$  (por hipótese perpendicular a  $AD$ ) o ponto distinto de  $C$  à mesma distância de  $D$  que  $C$ . O ponto  $B'$  pode ser construído de forma análoga.

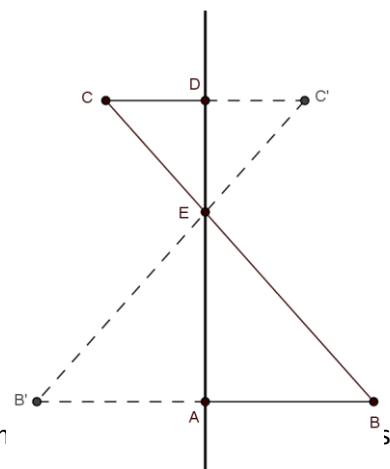
b. Por construção,  $C\hat{D}E = C'\hat{D}E$  pois são ambos retos.  $\overline{CD} = \overline{C'D}$  e  $[DE]$  é comum aos triângulos  $[CDE]$  e  $[C'DE]$ . Então, pelo caso LAL, estes triângulos são iguais. Consequentemente, os ângulos  $DEC$  e  $DEC'$  são iguais pois opõem-se a lados iguais em triângulos iguais.

Finalmente,  $\overline{CE} = \overline{C'E}$  pois são lados que se opõem iguais.

c. Por um raciocínio análogo ao utilizado na alínea anterior, estes triângulos são iguais assim como os ângulos e os segmentos de reta referidos.

d. Os ângulos  $CED$  e  $BEA$  são iguais pois são verticalmente opostos, logo os ângulos  $C'ED$  e  $B'EA$  também são iguais porque  $C\hat{E}D = C'\hat{E}D$  e  $B\hat{E}A = B'\hat{E}A$ .

Tem-se então que  $B'\hat{E}C' = C'\hat{E}D + B'\hat{E}D = B'\hat{E}A + B'\hat{E}D = A\hat{E}D$  que é um ângulo raso. Logo,  $B'$ ,  $E$  e  $C'$  estão alinhados por esta ordem pelo que  $\overline{B'C'} = \overline{B'E} + \overline{EC'} = \overline{BE} + \overline{EC} = \overline{BC}$ .



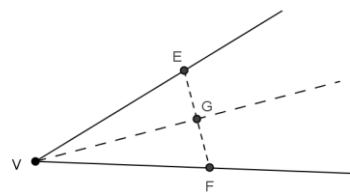
9.13

**Exemplo\***

Na figura está representado o ângulo convexo  $EVF$  e a respetiva bissetriz.

Os pontos  $E$  e  $F$  estão à mesma distância de  $V$ .

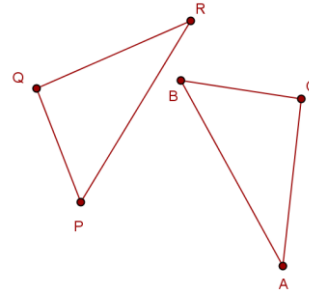
- Une os pontos  $E$  e  $F$  por um segmento de reta. Prova que os triângulos  $[EVG]$  e  $[FVG]$  são iguais, onde  $G$  designa a interseção da bissetriz de  $EVF$  com o segmento de reta  $[EF]$ .
- Justifica que  $\overline{EG} = \overline{GF}$ .
- Justifica que  $EF$  é perpendicular a  $VG$ .
- Justifica que o ponto  $E$  é imagem de  $F$  pela reflexão de eixo  $VG$ .



9.18

**Exemplo**

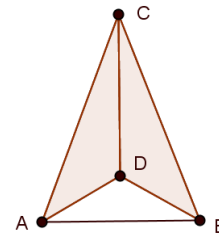
Na figura,  $\overline{AB} > \overline{AC} > \overline{BC}$  e  $\overline{PR} > \overline{RQ} > \overline{QP}$ . Sabe-se que cada um dos pontos  $A, B$  e  $C$  é transformado por uma dada rotação num dos pontos  $P, Q$  ou  $R$ . Indica qual o transformado de cada um dos pontos  $A, B$  e  $C$  por essa rotação.



10.1

**Exemplo (9.5)**

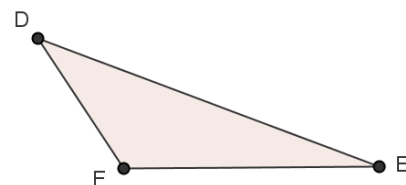
Na figura está representado um segmento de reta  $[AB]$  e os pontos  $C$  e  $D$  pertencentes à mediatriz de  $[AB]$ . Justifica que os triângulos  $[ADC]$  e  $[BDC]$  são iguais.



**Exemplo\*** (9.2,9.3)

Desenha um triângulo qualquer como, por exemplo, o triângulo  $[DEF]$  representado na figura.

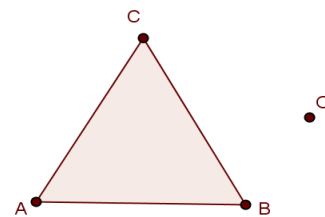
- Determina o ponto médio de um dos lados, por exemplo, do lado  $[DE]$  e designa-o por  $M$ .
- Constrói o transformado de cada um dos vértices do triângulo pela reflexão central de centro  $M$  e designa a imagem de  $F$  por  $G$ .
- Prova que o quadrilátero  $[DFEG]$  é um paralelogramo



**Exemplo (9.18)**

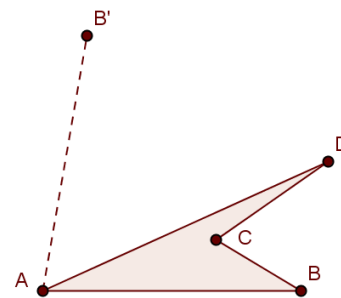
Na figura junta está representado um triângulo equilátero  $[ABC]$ .

- Constrói as imagens  $A', B'$  e  $C'$  dos pontos  $A, B$  e  $C$  pela rotação de centro  $O$ , sentido positivo e amplitude  $90^\circ$ .
- Justifica que o triângulo  $[A'B'C']$  é equilátero.



**Exemplo\***

Na figura está representado um quadrilátero côncavo  $[ABCD]$  e o ponto  $B'$  que é o transformado do ponto  $B$  por uma rotação de centro em  $A$ . Desenha a figura no teu caderno e, utilizando compasso e régua, determina os transformados dos restantes vértices do polígono.



**Exemplo\***

- a. Indica as simetrias de reflexão e de rotação dos seguintes quatro polígonos: triângulo equilátero, quadrado e pentágono e hexágono regulares.
- b. Será que podes conjecturar uma regra que preveja o número de simetrias de reflexão e de rotação para um polígono regular com  $n$  lados? Justifica.

Nota: Neste exemplo admite-se que a imagem de um polígono é o polígono cujos vértices são as imagens dos vértices do primeiro. Em rigor, este resultado, embora muito intuitivo, é neste nível ainda desconhecido dos alunos.

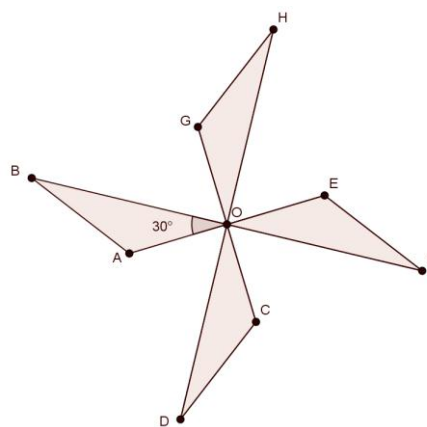
**Exemplo**

Desenha uma figura que tenha um centro de simetria mas que não tenha eixo de simetria e justifica.

**Exemplo**

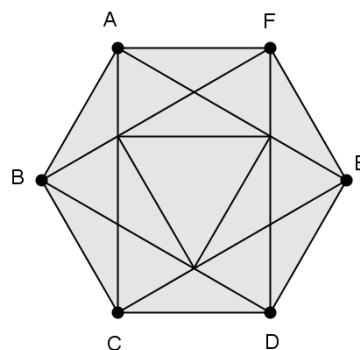
Na figura está representado um triângulo  $[OAB]$  e os seus transformados em sucessivas rotações de centro  $O$  e amplitude  $90^\circ$ .

- a. Identifica o transformado de  $B$  na rotação de centro  $O$  e amplitude:
- $180^\circ$ ;
  - $90^\circ$  e sentido negativo;
  - $270^\circ$  e sentido positivo.
- b. Descreve as simetrias de rotação que identificas nesta figura.

**Exemplo**

O hexágono  $[ABCDEF]$  representado na figura é regular.

- a. Indica o número de eixos de simetria da figura.
- b. Descreve as simetrias de rotação que identificas nesta figura.



Descritor	Texto de apoio
1.3	<p><b>Exemplo</b></p> <p>a. Mostra que <math>5^6 \times 5^3 = 5^9</math>, recorrendo à definição de potência de expoente natural.</p> <p>b.** Mostra, dados dois números naturais <math>m</math> e <math>n</math>, que <math>3^n \times 3^m = 3^{n+m}</math>.</p> <p>R.:</p> <p>a. Por definição, <math>5^6 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5</math>. Da mesma forma, <math>5^3 = 5 \times 5 \times 5</math>. Assim, <math>5^6 \times 5^3 = (5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5) = 5^9</math>.</p> <p>b. <math>3^n</math> designa o produto de <math>n</math> fatores iguais a 3; <math>3^m</math> designa o produto de <math>m</math> fatores iguais a 3:</p> $3^n \times 3^m = \underbrace{3 \times 3 \times \dots \times 3}_n \times \underbrace{3 \times 3 \times \dots \times 3}_m$ <p>Existem, pois, no produto <math>3^n \times 3^m</math>, <math>n + m</math> fatores iguais a 3 logo</p> $3^n \times 3^m = 3^{n+m}.$
1.4	<p><b>Exemplo</b></p> <p>a. Mostra que <math>(7^3)^4 = 7^{3 \times 4} = 7^{12}</math>, recorrendo à definição de potência de expoente natural.</p> <p>b.** Mostra, dados dois números naturais <math>m</math> e <math>n</math>, que <math>(4^n)^m = 4^{n \times m}</math>.</p> <p>R.:</p> <p>a. Por definição,</p> $(7^3)^4 = 7^3 \times 7^3 \times 7^3 \times 7^3$ $= (7 \times 7 \times 7) \times (7 \times 7 \times 7) \times (7 \times 7 \times 7) \times (7 \times 7 \times 7)$ <p>Existem, assim, <math>4 \times 3 = 12</math> fatores iguais a 7 neste produto, de onde se conclui que</p> $(7^3)^4 = 7^{3 \times 4}.$ <p>b. <math>(4^n)^m = \underbrace{4^n \times 4^n \times \dots \times 4^n}_m</math></p> <p>Substituindo cada um dos fatores <math>4^n</math> pelo produto de <math>n</math> fatores iguais a 4, vem</p> $(4^n)^m = \underbrace{(4 \times 4 \times \dots \times 4)}_n \times \underbrace{(4 \times 4 \times \dots \times 4)}_n \times \dots \times \underbrace{(4 \times 4 \times \dots \times 4)}_n$ $\underbrace{\hspace{10em}}_m \text{ vezes}$ <p>Existem <math>m \times n</math> fatores iguais a 4 neste produto, obtendo-se a igualdade</p> $(4^n)^m = 4^{n \times m}.$

1.6

**Exemplo\***

Dados dois números racionais  $q$  e  $r$ , mostra, utilizando a definição de potência, que  $(q \times r)^5 = q^5 \times r^5$ .

R.:

$$(q \times r)^5 = (q \times r) \times (q \times r) \times (q \times r) \times (q \times r) \times (q \times r) = \\ = q \times q \times q \times q \times q \times r \times r \times r \times r \times r = q^5 \times r^5.$$

**Exemplo**

Decompõe em fatores primos os seguintes números.

a.  $14^5$ ;b.  $6^7$ ;c.  $10^5 \times 12^4$ .

R.:

a.  $14^5 = (2 \times 7)^5 = 2^5 \times 7^5$ .

b.  $6^7 = (2 \times 3)^7 = 2^7 \times 3^7$ .

c.  $10^5 \times 12^4 = (2 \times 5)^5 \times (2^2 \times 3)^4 = 2^5 \times 5^5 \times (2^2)^4 \times 3^4 = \\ = 2^5 \times 5^5 \times 2^8 \times 3^4 = 2^{5+8} \times 3^4 \times 5^5 = 2^{13} \times 3^4 \times 5^5$ .

1.7

**Exemplo**

Escreve na forma de potência o número racional  $\frac{6^5}{6^2}$ .

R.:

$$\frac{6^5}{6^2} = \frac{6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6}{6 \times 6} = 6 \times 6 \times 6 = 6^3.$$

**Exemplo\*\***

Dados dois números naturais  $a$  e  $b$ , com  $a > b$ , mostra que  $\frac{7^a}{7^b} = 7^{a-b}$ .

R.: Por definição de potência,

$$\frac{7^a}{7^b} = \frac{\overbrace{7 \times 7 \times 7 \times \dots \times 7 \times 7}^{a \text{ vezes}}}{\underbrace{7 \times 7 \times \dots \times 7}_{b \text{ vezes}}}$$

Existem mais fatores no numerador, pelo que todos os fatores do denominador podem ser eliminados por simplificação. Sobram então  $a - b$  fatores no numerador:

$$\frac{7^a}{7^b} = \frac{\overbrace{7 \times 7 \times \dots \times 7}^{a - b \text{ vezes}}}{1} = 7^{a-b}.$$

**Exemplo\*\***

Dados dois números naturais  $a$  e  $b$ , com  $a > b$ , mostra que  $\frac{6,13^a}{6,13^b} = 6,13^{a-b}$ .

R.: Por definição de potência,

$$\frac{6,13^a}{6,13^b} = \frac{\overbrace{6,13 \times 6,13 \times 6,13 \times \dots \times 6,13 \times 6,13}^{a \text{ vezes}}}{\underbrace{6,13 \times 6,13 \times \dots \times 6,13}_{b \text{ vezes}}}$$

Existem mais fatores no dividendo, pelo que todos os fatores do divisor podem ser simplificados (cf. o texto de apoio a ALG5-1.8 ou, neste caso, por definição de quociente). Sobram então  $a - b$  fatores no dividendo:

$$\frac{6,13^a}{6,13^b} = \frac{\overbrace{6,13 \times 6,13 \times \dots \times 6,13}^{a - b \text{ vezes}}}{1} = 6,13^{a-b}.$$

1.8

**Exemplo**

Utilizando a definição de potência, escreve o quociente  $\frac{3^2}{7^2}$  na forma de potência.

$$R.: \frac{3^2}{7^2} = \frac{3 \times 3}{7 \times 7} = \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \left(\frac{3}{7}\right)^2.$$

**Exemplo\***

Utilizando a definição de potência, escreve o quociente  $\frac{5^4}{3^4}$  na forma de potência.

$$R.: \frac{5^4}{3^4} = \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{5}{3} \times \frac{5 \times 5 \times 5}{3 \times 3 \times 3} = \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} \times \frac{5 \times 5}{3 \times 3} = \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} = \left(\frac{5}{3}\right)^4.$$

**Exemplo\***

Utilizando a definição de potência, escreve o quociente  $\frac{73,4^3}{8,23^3}$  na forma de potência.

$$R.: \frac{73,4^3}{8,23^3} = \frac{73,4 \times 73,4 \times 73,4}{8,23 \times 8,23 \times 8,23} = \frac{73,4}{8,23} \times \frac{73,4 \times 73,4}{8,23 \times 8,23} = \frac{73,4}{8,23} \times \frac{73,4}{8,23} \times \frac{73,4}{8,23} = \left(\frac{73,4}{8,23}\right)^3.$$

No último exemplo utilizou-se o resultado expresso em ALG5-1.8

4.1

Neste descritor apresenta-se a definição de «grandezas diretamente proporcionais». Se  $y$  e  $x$  designarem respetivamente as medidas de duas grandezas, a primeira dependendo da segunda, as grandezas em causa dizem-se diretamente proporcionais se, dado um número positivo  $q$ , a uma medida  $q \times x$  da segunda corresponder uma medida  $q \times y$  da primeira.

Pode ser extremamente trabalhoso verificar que uma grandeza é diretamente proporcional a outra pela definição. No exemplo seguinte, em que se fornecem três valores da grandeza «Velocidade Média» e os correspondentes três valores da



grandeza «Gasolina Gasta», é, em rigor, necessário efetuar 6 verificações, correspondentes a todas as passagens possíveis entre valores da Velocidade Média: em km/h, de 80 para 120, de 80 para 160, de 120 para 160 e inversamente. Alguns destes cálculos são obviamente redundantes. É, no entanto, importante que os alunos apreendam esta definição e o seu significado: «se duplicar a velocidade, duplico a gasolina gasta», «se multiplicar por  $\frac{3}{2}$  a velocidade, multiplico também por  $\frac{3}{2}$  a gasolina gasta», etc.

Em 4.2 apresenta-se um resultado que permite, na prática, uma verificação bem mais expedita da proporcionalidade direta entre duas grandezas, por cálculo do quociente das respetivas medidas. Por equivalência, essa propriedade pode eventualmente ser apresentada como definição, embora seja intuitivamente menos esclarecedora quanto ao significado da proporcionalidade direta.

### Exemplo

*No quadro indica-se o consumo efetuado por um veículo que completa um trajeto fixo a uma dada velocidade média.*

*Verifica que o consumo é diretamente proporcional à velocidade média.*

<i>Velocidade média</i>	<i>80 km/h</i>	<i>120km/h</i>	<i>160km/h</i>
<i>Gasolina gasta</i>	<i>10 litros</i>	<i>15 litros</i>	<i>20 litros</i>

R.:

A 80 km/h, o veículo consome 10 litros.

A 160 km/h, o veículo consome 20 litros.

Para passar de 80 km/h para 160 km/h, multiplica-se por 2.

Para passar de 10 litros para 20 litros multiplica-se por 2.

(Inversamente, para passar de 160 para 80 km/h e de 20 para 10 litros, multiplica-se pelo mesmo coeficiente  $\frac{1}{2}$ .)

A 80 km/h, o veículo consome 10 litros.

A 120 km/h, o veículo consome 15 litros.

Para passar de 80 km/h para 120 km/h, multiplica-se por  $\frac{120}{80} = \frac{3}{2}$ .

Para passar de 10 litros para 15 litros, multiplica-se por  $\frac{15}{10} = \frac{3}{2}$ .

(Inversamente, para passar de 120 para 80 km/h e de 15 para 10 litros, multiplica-se pelo mesmo coeficiente  $\frac{2}{3}$ .)

Atendendo à definição de proporcionalidade direta, é ainda necessário proceder a mais duas verificações (apesar de poderem ser deduzidas das anteriores):

A 160 km/h, o veículo consome 20 litros.

A 120 km/h, o veículo consome 15 litros.

Para passar de 120 km/h para 160 km/h, multiplica-se por  $\frac{160}{120} = \frac{4}{3}$ .

Para passar de 15 litros para 20 litros, multiplica-se por  $\frac{20}{15} = \frac{4}{3}$ .

(Inversamente, para passar de 160 para 120 km/h e de 20 para 15 litros, multiplica-se pelo mesmo coeficiente  $\frac{3}{4}$ .)

Podemos concluir que, no quadro apresentado, o consumo é diretamente proporcional à velocidade média.

4.2

Esta propriedade, por ser equivalente à definição fornecida no descritor anterior, pode ser utilizada como definição da noção de proporcionalidade direta, passando então o descritor 4.1 a descrever uma propriedade.

**Informação Complementar para o professor**

Grandezas diretamente proporcionais

Consideremos uma grandeza  $Y$  diretamente proporcional a outra  $X$ . Se as medidas  $y$  e  $y'$  de  $Y$  corresponderem respetivamente a medidas  $x$  e  $x'$  de  $X$ , como para passar de  $x$  para  $x'$  se pode multiplicar por  $\frac{x'}{x}$ , então  $y' = \frac{x'}{x}y$ , ou seja,  $\frac{y'}{x'} = \frac{y}{x}$ .

Inversamente, dadas duas grandezas  $X$  e  $Y$ ,  $Y$  dependente de  $X$  de modo que quaisquer medidas  $x$  e  $x'$  de  $X$  e correspondentes medidas  $y$  e  $y'$  de  $Y$  respeitem a igualdade  $\frac{y'}{x'} = \frac{y}{x}$ , tomando  $x' = qx$ , obtemos  $\frac{y'}{qx} = \frac{y}{x}$ , ou seja, utilizando a propriedade expressa no descritor ALG5-1.8,  $y' = qx \frac{y}{x} = \frac{qxy}{x} = qy$ , logo as grandezas são diretamente proporcionais.

**Exemplo**

*Num supermercado, a quantidade de arroz que se pode comprar com uma dada soma de dinheiro é-lhe diretamente proporcional.*

a. Completa a seguinte tabela

Arroz	3 kg	6000 g	3 hg
Preço	4 euros		

b. Efetua o quociente entre o preço e o número de quilos de arroz que lhe corresponde. O que verificas?

R.: a.

É necessário começar por converter o peso do arroz considerado numa mesma unidade de medida:

Arroz	3 kg	6 kg	0,3kg
Preço	4 euros		

Tem-se

Arroz	3kg	6kg	0,3kg
Preço	4 euros	8 euros	0,4 euros

Logo:

b.  $\frac{0,4}{0,3} = \frac{4 \times \frac{1}{10}}{3 \times \frac{1}{10}} = \frac{4}{3}$  e  $\frac{8}{6} = \frac{4 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4}{3}$ . Verifica-se que os três quocientes são iguais.

	<p>Note-se ainda que a propriedade enunciada no presente descritor permite verificar de forma mais célere que duas grandezas são diretamente proporcionais. Por exemplo, no exemplo do descritor anterior, teria bastado observar que os quocientes dos valores correspondentes são iguais <math>\left(\frac{80}{10} = \frac{160}{20} = \frac{120}{15}\right)</math> para se poder concluir que as duas grandezas em causa são diretamente proporcionais.</p>
4.3	<p>Trata-se de uma consequência imediata do descritor anterior: se <math>\frac{y}{x} = c</math> é constante, então se <math>\frac{x}{y} = \frac{1}{c}</math> é também constante, observando-se que as duas constantes de proporcionalidade são inversas uma da outra.</p> <p>Esta propriedade permite falar em «duas grandezas diretamente proporcionais», sem especificar qual é a grandeza que se considera como dependente da outra.</p>

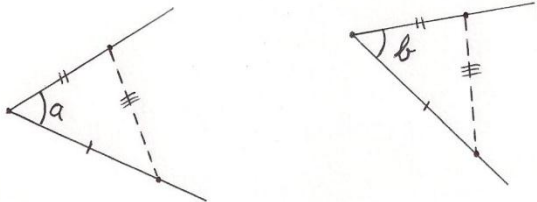
## Organização e Tratamento de Dados OTD6

Descritor	Texto de apoio
1.3	<p><b>Exemplo</b></p> <p><i>Das seguintes variáveis estatísticas indica as que são qualitativas:</i></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• <i>Idade;</i></li><li>• <i>Ano de escolaridade;</i></li><li>• <i>Altura;</i></li><li>• <i>Nacionalidade;</i></li><li>• <i>Meio de transporte utilizado no percurso casa-escola;</i></li><li>• <i>Tempo médio gasto no percurso casa-escola;</i></li><li>• <i>Código postal.</i></li></ul> <p>No que diz respeito ao último exemplo, é importante chamar a atenção dos alunos para o facto de que nem todas as variáveis que tomam valores envolvendo representações com algarismos são quantitativas. O código postal é uma variável estatística qualitativa, uma vez que não resulta de uma contagem, ou, mais geralmente da medida de uma dada grandeza.</p>
2.2	<p><b>Exemplo*</b></p> <p><i>Considera o seguinte conjunto de dados: 7, 6, 5, 1, 4, 2, 6, 5, 6, 3.</i></p> <p><i>Indica se são verdadeiras ou falsas as afirmações:</i></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• <i>A moda é igual à amplitude;</i></li><li>• <i>A média é um número inteiro;</i></li><li>• <i>Se acrescentarmos o número 7 aumenta a amplitude;</i></li><li>• <i>Se acrescentarmos o número 7 aumenta a média;</i></li><li>• <i>Se acrescentarmos o número 7 aumenta a moda;</i></li><li>• <i>Se retirarmos o número 3 diminui a amplitude;</i></li><li>• <i>Se retirarmos o número 3 diminui a média;</i></li><li>• <i>Se retirarmos o número 3 diminui a moda.</i></li></ul>

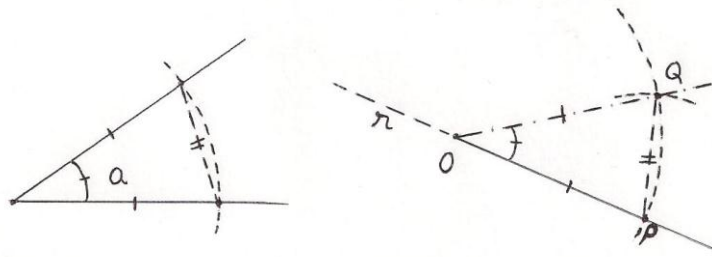
**METAS CURRICULARES DO ENSINO BÁSICO - MATEMÁTICA**

**Texto Complementar de Geometria**  
**2.º Ciclo**

**António Bivar, Carlos Grosso, Filipe Oliveira, Maria Clementina Timóteo**

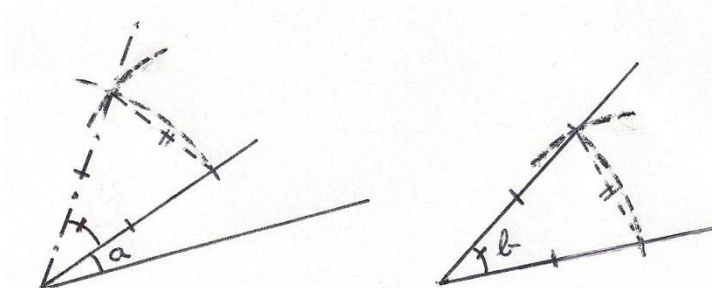
Descritor	Texto de apoio
1.1 1.2 1.3	<p>A construção de um ângulo igual à soma de outros dois, utilizando a noção de «ângulos adjacentes», é uma boa oportunidade para operacionalizar o critério de igualdade geométrica de ângulos (e portanto de igualdade de amplitude) introduzido no 1.º ciclo, por comparação de comprimentos de segmentos de reta, e que deve agora ser revisitado (<i>cf.</i> GM4-2.11).</p> <p>Como então foi visto, dados dois ângulos <math>a</math> e <math>b</math> (ambos convexos ou ambos côncavos) podemos concluir que têm a mesma amplitude (e portanto que são iguais) começando por escolher um lado em cada um dos ângulos e fixando em cada um desses lados um ponto, de modo que esses pontos fiquem à mesma distância do vértice do respetivo ângulo, em seguida repetindo este processo com os outros lados dos ângulos e verificando que são iguais os segmentos determinados em cada ângulo pelos pontos assim fixados nos respetivos lados. Na figura seguinte, a igualdade dos ângulos <math>a</math> e <math>b</math> fica garantida pela igualdade dos segmentos assinalados com três traços, depois de escolhidos os pontos que determinam com os vértices dos ângulos os segmentos marcados com um e dois traços, de maneira que sejam iguais os assinalados com o mesmo número de traços (um ou dois):</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>Este critério é a expressão geométrica do processo prático para comparar ângulos em objetos ou desenhos ou para “transportar” um ângulo, utilizando um objeto “rígido” com três pontos nele fixados, um deles destinado a sobrepôr-se aos vértices e os outros dois a incidirem em cada um dos lados dos ângulos a comparar ou do ângulo a representar. Na aplicação deste critério é arbitrária a escolha dos pontos em cada lado dos ângulos, nas condições referidas, tal como nos objetos utilizados para “transportar ângulos” podemos substituir os pontos distintos do vértice por outros nas mesmas semirretas de origem no vértice. A coerência deste procedimento, ou seja, o facto de podermos escolher arbitrariamente os pontos nas referidas condições, fundamenta-se num pressuposto básico da Geometria que pode ser considerado parte integrante do critério que estamos a recordar: não só podemos utilizar o critério para verificar se são iguais dois ângulos <math>a</math> e <math>b</math> como os assinalados na figura anterior, mas, <i>reciprocamente</i>, se o forem, fica garantida a igualdade dos segmentos assinalados com três traços, desde que sejam arbitrariamente fixados pontos que determinam com os vértices dos ângulos segmentos como os marcados com um e dois traços, de maneira que sejam iguais os assinalados com o mesmo número de traços. Traduziremos mais tarde este facto no chamado «critério LAL de igualdade de triângulos».</p> <p>Este critério de igualdade de ângulos permite justificar um método prático para transportar um ângulo utilizando agora apenas régua e compasso. Dado um ângulo</p>

$a$ , uma reta  $r$  e um ponto  $O$  em  $r$  podemos construir um ângulo igual a  $a$ , tendo  $O$  por vértice, um dos lados coincidente com uma das semirretas de origem  $O$  e suporte  $r$  e o outro lado num dos semiplanos de fronteira  $r$ , do modo assinalado na figura seguinte:



Basta para tal utilizar o compasso para assinalar em cada um dos lados de  $a$  um ponto a uma determinada distância não nula do vértice (arbitrariamente escolhida), traçar, no plano escolhido para conter o ângulo transportado, um arco de circunferência de centro  $O$  com raio igual a essa distância (igual ao comprimento dos segmentos assinalados com um traço), de modo a determinar um ponto  $P$  na semirreta de suporte  $r$  escolhida para um dos lados do ângulo transportado e em seguida determinar um ponto  $Q$  no segundo lado desse ângulo. Esse ponto  $Q$  pode ser obtido transportando a distância marcada com dois traços: interseção dos dois arcos de circunferência indicados, com centros respectivamente em  $O$  e em  $P$  e raios assinalados respectivamente com um e dois traços. Garantimos assim que o ângulo  $QOP$  é igual ao ângulo  $a$ , pois, por construção, fica verificado o critério de igualdade de ângulos.

Para obter um «ângulo soma» de dois ângulos  $a$  e  $b$  (que começamos por supor convexos) podemos agora transportar o ângulo  $b$  construindo um ângulo adjacente a  $a$  com a mesma amplitude que  $b$ , utilizando régua e compasso, pelo processo anteriormente descrito:

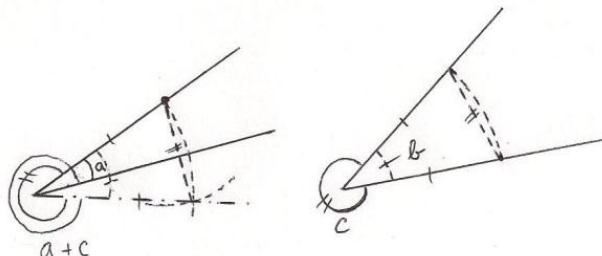


Apenas devemos garantir que um dos lados do ângulo transportado coincide com um dos lados de  $a$  e o outro fica no plano contendo  $a$  mas num semiplano distinto do que contém o outro lado de  $a$ , para que fique garantido que o ângulo assim transportado fica adjacente a  $a$  (partilham um lado mas um ângulo não está contido no outro, já que os lados não comuns estão em semiplanos opostos).

Quando um dos ângulos é raso o próprio processo atrás indicado para transportar um ângulo para determinado semiplano com um dos lados pré-fixado resolve a questão.

Se um dos ângulos for nulo não está definida a soma com outro ângulo, já que um ângulo nulo não é adjacente a nenhum ângulo (está contido em qualquer ângulo com o qual “partilhe um lado”...). Poderíamos evidentemente convencionar que qualquer ângulo  $a$  é igual à soma de um ângulo nulo com um ângulo igual a  $a$ .

Se um dos ângulos for côncavo pode utilizar-se o mesmo processo para transportar o ângulo convexo que com ele forma um ângulo giro; no exemplo acima, se se pretendesse obter um ângulo igual à soma de  $a$  com o ângulo côncavo  $c$  associado a  $b$  bastaria efetuar uma construção idêntica mas de maneira que o ângulo de amplitude igual a  $b$  contivesse  $a$ ; o ângulo soma seria o ângulo côncavo com um lado coincidente com o lado de  $a$  que não interveio na construção e o outro coincidente com a semirreta obtida por “transporte de  $b$ ”:

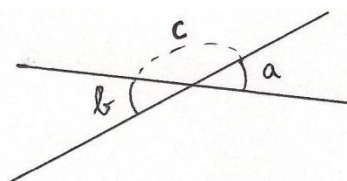


Em alternativa, poder-se-ia transportar  $a$  de modo a construir um ângulo de amplitude igual a  $a$ , com um lado comum com  $b$  e contido em  $b$  (portanto adjacente a  $c$ ).

**Observação:** No caso em que o ângulo  $b$  é menor do que o ângulo  $a$  não existe um ângulo que seja igual à soma de  $a$  com o ângulo côncavo associado a  $b$ ; nesse caso a união desse ângulo côncavo com um ângulo adjacente de amplitude igual a  $a$  seria o plano todo e não um ângulo não giro. Mas quando a união é o plano todo só se considera que a soma dos ângulos é o ângulo giro quando forem respetivamente iguais a dois ângulos não coincidentes com os mesmos lados, o que significaria que os ângulos  $a$  e  $b$  seriam iguais. Na última construção acima, no caso em que  $b$  é menor do que  $a$ , o ângulo igual a  $b$  que se constrói com um lado comum com  $a$  fica nesse caso contido em  $a$  e os lados acima referidos não determinam portanto o ângulo soma, que neste caso não existe.

1.7

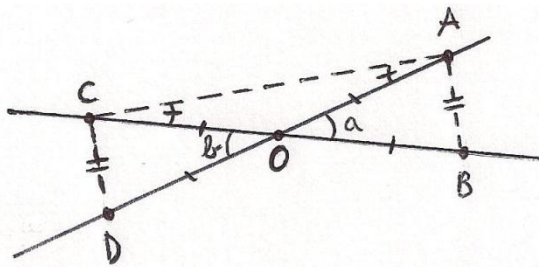
Para concluir a igualdade de dois ângulos verticalmente opostos podemos invocar uma propriedade bastante intuitiva, embora numa construção rigorosa da Geometria fosse necessário justificá-la: são iguais dois ângulos suplementares de um mesmo ângulo:



Na figura representam-se dois ângulos verticalmente opostos  $a$  e  $b$  e o ângulo  $c$  que é simultaneamente suplementar de  $a$  e  $b$ , os quais são portanto iguais.

**Observação:** A propriedade utilizada é um caso particular de um princípio geral utilizado nos Elementos de Euclides e considerado como um dos “axiomas” («se quantidades iguais forem subtraídas de quantidades iguais os restos são iguais»). A nível mais avançado, com maior exigência de rigor, poderia utilizar-se a seguinte construção para justificar a igualdade dos ângulos  $a$  e  $b$  sem invocar a referida propriedade (de facto para a justificar neste caso particular...):

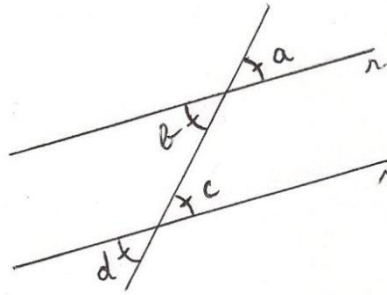




Começa-se por marcar os pontos  $A, B, C, D$  à mesma distância do vértice comum  $O$  dos dois ângulos  $a$  e  $b$  e, respectivamente, nos quatro lados dos dois ângulos; o objetivo é mostrar que  $\overline{AB} = \overline{CD}$  e aplicar o critério de igualdade de ângulos para concluir que  $a$  é igual a  $b$ . Para começar conclui-se que os ângulos  $OAC$  e  $OCA$  são iguais, pelo critério de igualdade de ângulos, já que  $\overline{AO} = \overline{CO}$ ,  $\overline{AC} = \overline{CA}$  e utilizando novamente  $\overline{CO} = \overline{AO}$ ; pelo mesmo critério (utilizando agora a igualdade dos ângulos para concluir a igualdade dos segmentos), já que esses ângulos coincidem, respectivamente, com os ângulos  $DAC$  e  $BCA$  e  $\overline{CA} = \overline{AC}$ ,  $\overline{CB} = \overline{AD}$ , então  $\overline{AB} = \overline{CD}$  e portanto, ainda pelo mesmo critério,  $a$  e  $b$  são iguais.

1.10	Duas semirretas dizem-se «diretamente paralelas» se tiverem o mesmo sentido, ou seja, se tiverem a mesma reta suporte e uma estiver contida na outra ou se tiverem retas suporte distintas mas paralelas e estiverem contidas num mesmo semiplano contendo as respectivas origens. Se duas semirretas tiverem retas suporte coincidentes ou paralelas mas não forem diretamente paralelas (ou seja, se não tiverem o mesmo sentido), dizem-se «inversamente paralelas».
1.11 1.12	<p>No primeiro destes descritores introduz-se um critério operacional para identificar retas paralelas; essencialmente estabelece-se que duas semirretas traçadas num mesmo semiplano a partir de pontos distintos de uma dada reta são paralelas quando (e apenas quando) têm igual “afastamento angular” dessa reta, “medido” a partir de semirretas com o mesmo sentido que partilhem essa reta suporte. Trata-se de uma generalização de propriedades de paralelismo exploradas no 1º ciclo, envolvendo retas verticais e horizontais ou direções perpendiculares a uma mesma direção numa grelha quadriculada; aqui os ângulos utilizados para aferir o paralelismo não têm de ser retos, o que justifica a possibilidade de traçar paralelas com régua e esquadro utilizando um dos ângulos não retos do esquadro, como é sugerido em 1.12.</p> <p>Note-se que, atendendo às definições anteriores, ângulos correspondentes têm os lados dois a dois diretamente paralelos.</p>
1.13	Na figura seguinte, podemos imediatamente concluir que os ângulos $a$ e $b$ são iguais, por serem verticalmente opostos (1.7), assim como os ângulos $c$ e $d$ ; por outro lado, se considerarmos que as retas $r$ e $s$ são paralelas, os ângulos correspondentes $a$ e $c$ também serão iguais (1.11) o que garante a igualdade dos quatro ângulos e, em particular, dos ângulos alternos internos ( $b$ e $c$ ), e alternos externos ( $a$ e $d$ ). Reciprocamente se algum destes dois pares de ângulos for constituído por ângulos iguais conclui-se que os ângulos correspondentes $a$ e $c$

também são iguais e portanto as retas  $r$  e  $s$  são paralelas, pelo critério de paralelismo acima referido (1.11).

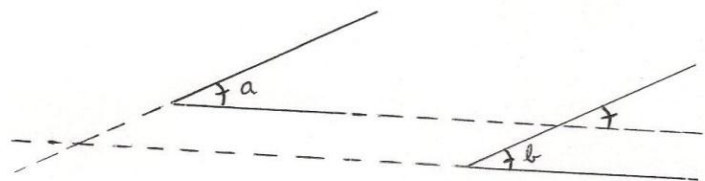


Pode observar-se ainda que estas igualdades, no caso de  $r$  e  $s$  serem paralelas, também garantem que os ângulos internos do mesmo lado da secante são suplementares, bem como os ângulos externos do mesmo lado da secante, e que, reciprocamente, o facto de qualquer destes pares de ângulos ser constituído por ângulos suplementares garante o paralelismo das retas  $r$  e  $s$ , já que garante a igualdade dos ângulos correspondentes  $a$  e  $c$  (por serem suplementares do mesmo ângulo).

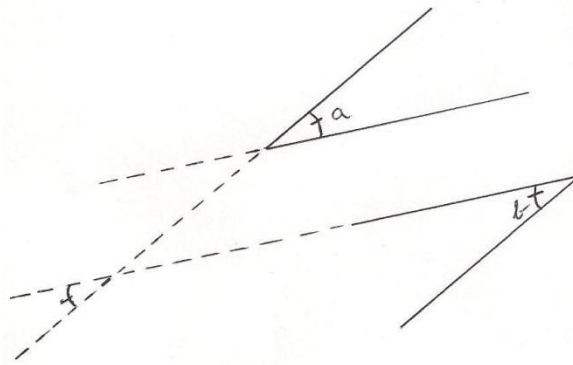
Note-se que, atendendo às definições de semirretas diretamente e inversamente paralelas, os ângulos alternos internos têm lados dois a dois inversamente paralelos, tal como os ângulos alternos externos, ao passo que os ângulos internos do mesmo lado da secante têm um par de lados diretamente paralelos e um par de lados inversamente paralelos, o mesmo se passando com os ângulos externos do mesmo lado da secante.

1.14

A seguinte construção, utilizando a igualdade dos ângulos correspondentes determinados por secantes em pares de retas paralelas (1.11), garante a igualdade dos ângulos assinalados e portanto dos ângulos convexos e complanares  $a$  e  $b$ , de lados diretamente paralelos. Utiliza-se aqui a definição de semirretas diretamente paralelas para representar adequadamente o sentido dos lados dos ângulos, para além das condições de paralelismo impostas às respectivas retas suporte:



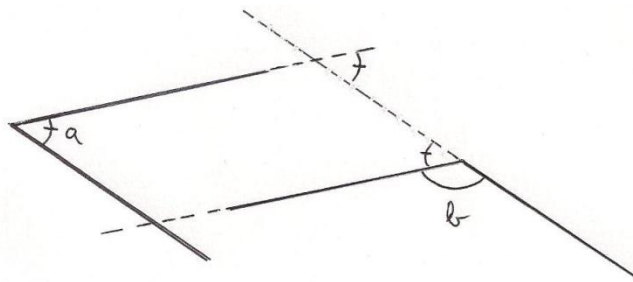
Analogamente, quando os lados dos ângulos convexos e complanares  $a$  e  $b$  forem dois a dois inversamente paralelos podemos utilizar a igualdade de ângulos alternos internos ou alternos externos (é a opção assinalada na figura seguinte), para além da igualdade de ângulos correspondentes, e concluir também a igualdade dos ângulos  $a$  e  $b$ :



Na identificação de semirretas diretamente paralelas pode utilizar-se a “propriedade transitiva” que não foi demonstrada mas que é bastante intuitiva: se duas semirretas são diretamente paralelas a uma terceira são diretamente paralelas entre si.

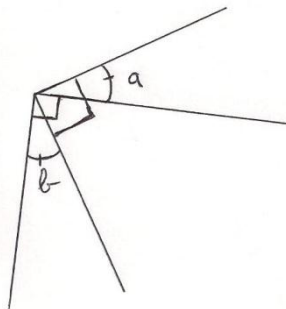
1.15

Mais uma vez analogamente ao que foi feito para ângulos de lados diretamente ou inversamente paralelos (1.14), a seguinte construção permite concluir que os ângulos  $a$  e  $b$  são suplementares se tiverem dois lados diretamente paralelos e outros dois inversamente paralelos, já que fica construído um ângulo raso como união de dois ângulos adjacentes respectivamente iguais a  $a$  e  $b$ :



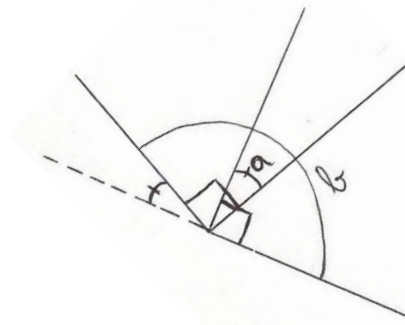
1.16

Embora não se peça qualquer justificação para esta propriedade, pode observar-se que, utilizando uma das referidas em 1.14, podemos reduzir-nos ao caso em que os ângulos  $a$  e  $b$  têm vértice comum, eventualmente “transportando  $b$ ” (por exemplo) de maneira a obter um ângulo de lados diretamente paralelos aos lados de  $b$  e com o mesmo vértice que  $a$ ; nesse caso, se forem ambos agudos a situação será a seguinte:



Pode observar-se que os ângulos  $a$  e  $b$  são complementares de um mesmo ângulo  $e$ , por esse motivo, iguais.

No caso em que um dos ângulos é agudo e o outro obtuso teremos:

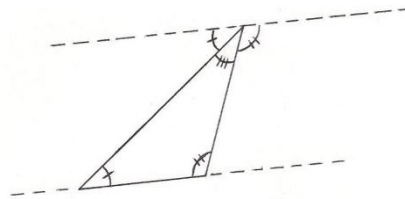


Neste caso, pelo que acabámos de ver, obtemos um ângulo igual a  $a$  (assinalado na figura) e suplementar de  $b$ .

O caso em que os ângulos são ambos obtusos poderia ser tratado de forma idêntica.

2.2

A seguinte construção, considerando uma reta paralela a um dos lados de um dado triângulo e passando pelo vértice oposto a esse lado, permite imediatamente concluir, pela igualdade de ângulos alternos internos (1.13), que se obtém um ângulo raso igual à soma sucessiva dos três ângulos internos do triângulo:

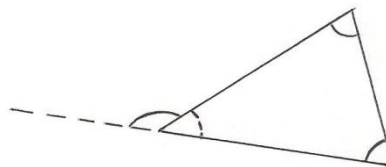


2.3

Sabendo-se já que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a um ângulo raso, conclui-se que, se um dos ângulos for reto ou obtuso, a soma dos outros dois não pode ser senão um ângulo reto ou agudo, pelo que cada um deles terá de ser agudo. Deste modo, num dado triângulo, não pode existir mais que um ângulo reto ou obtuso.

2.5

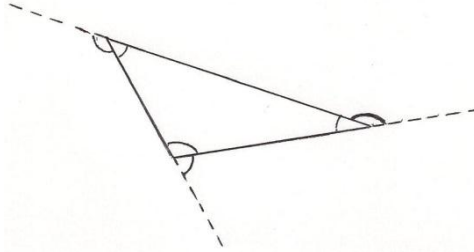
Uma vez que um ângulo externo, por definição, é suplementar do ângulo interno que lhe é adjacente, ou seja, a soma desses ângulos é igual a um ângulo raso, que é também a soma dos três ângulos internos (2.2), imediatamente se conclui que o ângulo externo é igual à soma dos internos não adjacentes (utilizando o princípio já invocado em 1.7):



**Observação:** Em consequência deste resultado podemos concluir que um ângulo externo é maior do que qualquer dos ângulos internos não adjacentes, propriedade que também convém registar, ainda que seja consequência imediata da que acabámos de justificar.

2.6

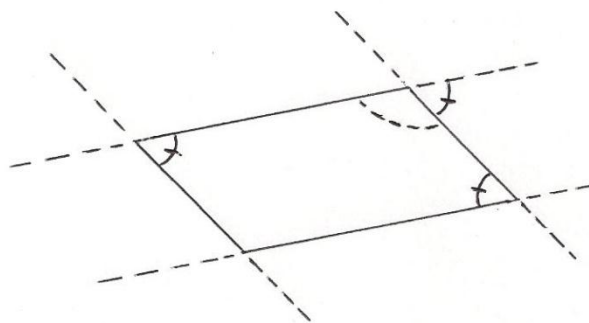
A soma de dois ângulos externos com vértices distintos, adicionada aos internos respetivamente adjacentes (e portanto suplementares) é obviamente igual a dois ângulos rasos, ou seja, a um ângulo giro; ora os dois ângulos internos podem ser substituídos, nesta soma, por um externo não adjacente (2.5), pelo que a soma de três ângulos externos com vértices distintos é também igual a um ângulo giro:



Esta propriedade pode ser explorada utilizando a relação estabelecida no 1º ciclo entre ângulos, voltas e itinerários; se imaginarmos que o triângulo da figura se situa num plano horizontal e que um observador situado de pé num dos vértices do triângulo olha em frente dirigindo o olhar na direção do lado do ângulo externo assinalado a tracejado e depois gira sobre si próprio de modo a ficar com o olhar dirigido na direção do outro lado desse ângulo (o que contém um dos lados do triângulo), terá dado uma volta de amplitude igual ao ângulo externo assinalado, com esse vértice. Se em seguida percorrer inteiramente esse lado do triângulo e, chegado ao vértice seguinte, voltar a girar sobre si próprio para percorrer o lado seguinte do triângulo, mais uma vez terá dado uma volta de amplitude igual ao ângulo externo assinalado nesse segundo vértice do triângulo. Repetindo o processo no vértice seguinte terá dado três voltas de amplitudes sucessivamente iguais aos ângulos externos assinalados na figura e, ao voltar à posição inicial, estará virado para a mesma direção, o que é consequência do facto de ter dado uma volta inteira, correspondente a um ângulo giro. Veremos mais tarde como esta observação pode estender-se a polígonos com mais de três lados e como a intuição que a suporta pode levar conclusões erradas em situações em que as trajetórias não são percorridas num plano euclidiano (cf. GM7-2.13)

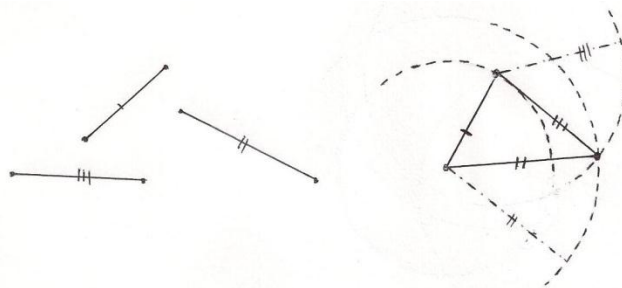
2.7

As propriedades dos ângulos internos de um paralelogramo aqui indicadas (ângulos opostos iguais, ângulos consecutivos suplementares) resultam imediatamente das igualdades de ângulos correspondentes e alternos internos assinalados na figura seguinte (cf. 1.11,13):

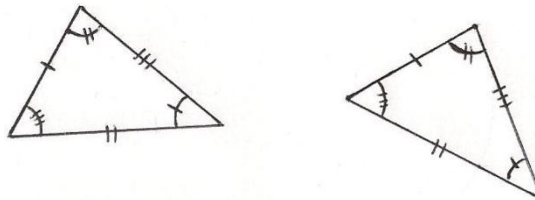


2.9

Dados três segmentos de reta podemos tentar construir um triângulo com lados de comprimentos respetivamente dados por esses três segmentos; veremos depois que nem sempre isso é possível (cf. 2.17), mas, utilizando um compasso e uma régua, podemos, partindo de um ponto qualquer do plano, começar por construir um segmento igual a um dos segmentos dados e, com centros nos extremos desse segmento, traçar arcos de circunferência de raios respetivamente iguais aos restantes dois segmentos dados. Se essas circunferências se intersectarem em pontos fora do segmento inicial (o que acontece quando, e apenas quando, os respetivos raios tiverem soma maior do que o comprimento desse segmento e cada um deles for menor do que a soma do outro com o comprimento do segmento, como veremos a propósito de 2.17) um desses pontos de interseção pode ser tomado para terceiro vértice de um triângulo que, por construção, terá lados respetivamente iguais aos três segmentos dados:

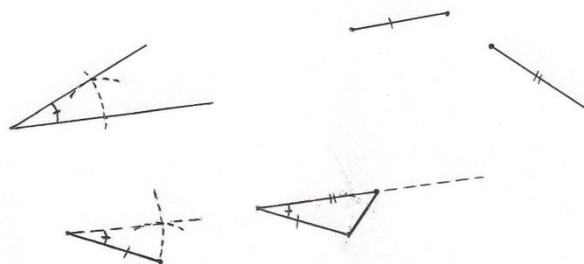


Dados dois triângulos, se for possível estabelecer uma correspondência um a um entre os lados de um e do outro de maneira que lados correspondentes sejam iguais, como é o caso de dois triângulos construídos dados os comprimentos dos lados, como acima, então, pelo critério de igualdade de ângulos, serão também iguais os ângulos determinados por pares de lados correspondentes. Deste modo os dois triângulos cumprirão o critério geral para igualdade geométrica de polígonos (GM4-3.7). Podemos assim dizer que são iguais triângulos com os lados dois a dois iguais (critério LLL de igualdade de triângulos):



2.10

A construção de um triângulo dados os comprimentos de dois lados e a amplitude do ângulo interno por eles formado pode ilustrar-se com a seguinte figura, em que se utilizou régua e compasso para transportar o ângulo dado:



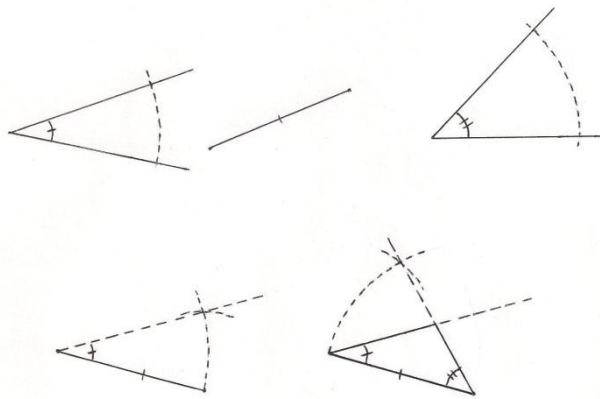
Na parte de baixo da figura decompõe-se em dois passos a construção do triângulo; começa-se por transportar o ângulo utilizando o comprimento de um dos segmentos

dados e em seguida marca-se o outro comprimento no outro lado do ângulo. Se apenas pretendêssemos construir um exemplo de triângulo com estes dados, podendo utilizar-se logo o ângulo dado, exatamente onde se situa, bastaria, evidentemente, marcar os comprimentos dados nos respectivos lados.

A igualdade de dois quaisquer triângulos construídos com estes dados resulta simplesmente da igualdade dos lados não prescritos (e do critério LLL), o que é consequência do critério de igualdade de ângulos. Este critério de igualdade de triângulos, designado por LAL, encontra-se demonstrado nos Elementos de Euclides, mas o processo aí utilizado não é atualmente aceite como válido e esta proposição ou outra equivalente é considerada usualmente como axioma; nele se fundamenta o critério que se tem utilizado para igualdade de ângulos e a respetiva coerência.

2.11

Trata-se aqui de construir um triângulo sendo dado o comprimento de um dos lados e as amplitudes dos dois ângulos internos adjacentes (cuja soma, evidentemente, tem de ser menor que um raso); mais uma vez, apresenta-se uma construção que permite obter um triângulo com esses dados, partindo de um segmento arbitrariamente localizado no plano:



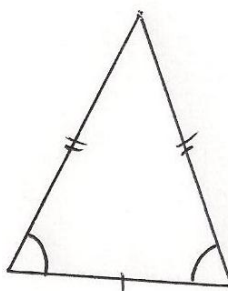
A justificação de que todos os triângulos assim obtidos são iguais, pode basear-se na seguinte construção:



Para se concluir que os triângulos são iguais, tendo iguais um dos lados (assinalado na figura, em cada triângulo, com um traço) e os ângulos adjacentes (assinalados na figura, em cada triângulo respetivamente com um e dois traços), basta provar que os outros lados adjacentes aos ângulos assinalados com um traço (por exemplo) também são iguais e aplicar o critério LAL (2.10). Se um desses lados for maior que o outro, admitamos que é o assinalado com dois traços, então, transportando esse comprimento para o lado correspondente do triângulo da esquerda a partir do vértice do ângulo “com um traço” ficamos com a figura acima, à esquerda. Mas então o triângulo com os lados parcialmente tracejados fica igual ao da direita, pelo critério LAL, o que determina a igualdade dos ângulos marcados com dois traços, que têm lados adjacentes e opostos respetivamente iguais nos dois triângulos. Deste modo chegamos a uma contradição, pois na figura da esquerda temos dois ângulos que deveriam ser iguais, mas tendo um amplitude superior ao outro por ser união deste com um ângulo adjacente (cf. a observação relativa ao descritor 2.5).

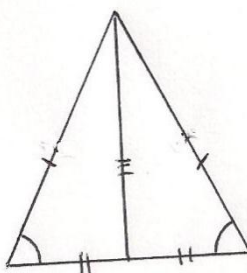
2.12

Se num triângulo dois dos lados forem iguais o critério de igualdade de ângulos permite concluir imediatamente que os ângulos assinalados na figura, opostos a esses lados, também são iguais, analisando-se as igualdades de segmentos de reta que permitem aferir a igualdade dos ângulos:



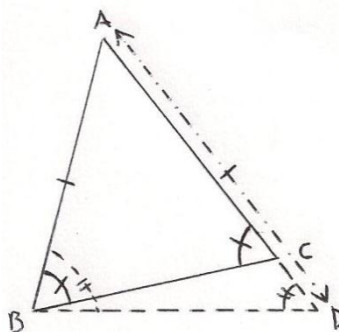
Esta propriedade, considerada uma das mais elementares da geometria euclidiana tal como era ensinada na Idade Média, era então designada por *pons asinorum* (“ponte dos asnos”, em latim, por se considerar que deveria ser uma “ponte” fácil de passar e pela própria forma da figura que ilustra a propriedade em questão...).

Outra construção que por vezes se utiliza para obter este resultado consiste em começar por tomar o ponto médio do terceiro lado do triângulo (para além dos dois cuja igualdade é pressuposta). Traçando o segmento que une o vértice oposto a esse ponto médio obtemos a seguinte figura:



Agora, o critério LLL permite concluir que os triângulos são iguais, notando-se que os ângulos assinalados são determinados por lados correspondentes iguais, pelo que são iguais. Esta identificação dos ângulos iguais em triângulos iguais, que foi referida a propósito do critério LLL (2.9), é abordada de forma sistemática em 2.13.

Reciprocamente, se num triângulo dois dos ângulos forem iguais, podemos concluir que os lados opostos são iguais, pois se um deles fosse maior do que o outro poderíamos efetuar a seguinte construção:



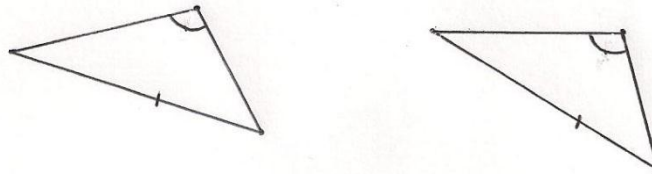
Supondo aqui que  $AB$  tinha comprimento maior do que  $AC$  poderíamos construir  $AD$  com o mesmo comprimento do que  $AB$  nas condições da figura e agora, pela



propriedade que acabámos de justificar, seriam iguais os ângulos assinalados com dois traços ( $ABD$  e  $ADB$ ). Mas então, por esse motivo, teríamos que a amplitude de  $ADB$  seria maior do que a amplitude de  $ABC$  e portanto do que a amplitude de  $ACB$ , o que é absurdo, já que  $ACB$  é ângulo externo de um triângulo ( $[BCD]$ ) de que  $ADB$  é ângulo interno não adjacente.

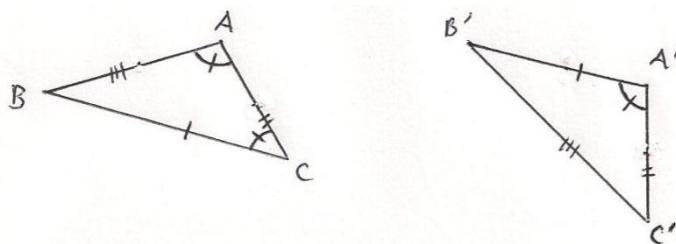
2.13

Em triângulos iguais, mesmo não sendo dada *a priori* uma correspondência entre lados dos dois triângulos que associe lados iguais, é possível identificar pares de ângulos iguais através da igualdade dos lados opostos a esses ângulos, e, reciprocamente, podemos identificar pares de lados iguais através da igualdade dos ângulos opostos. Com efeito, consideremos primeiramente dois triângulos iguais e dois lados correspondentes iguais, assinalando os ângulos opostos:



Sendo os triângulos iguais, os restantes dois lados de um dos triângulos têm de estar em correspondência com os restantes dois lados do outro, de modo que lados correspondentes sejam iguais; ora essas igualdades, complementadas com a que já está assinalada na figura, são suficientes para garantir a igualdade dos ângulos assinalados.

Reciprocamente, consideremos dois triângulos iguais, existindo portanto uma correspondência que associa cada lado de um a um lado igual do outro, e sejam dados dois ângulos iguais, um em cada triângulo; se os lados opostos a esses ângulos em cada triângulo não forem os correspondentes, teremos forçosamente uma situação que pode ser ilustrada pela seguinte figura (assinalam-se os lados correspondentes pelo mesmo número de traços):



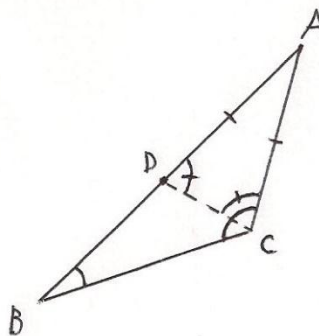
Agora podemos aplicar o critério que acabámos de demonstrar para concluir que o ângulo interno de vértice em  $C$  é igual ao ângulo interno de vértice em  $A'$ , já que se opõem a lados iguais em triângulos iguais. Mas então no triângulo  $[ABC]$  são iguais os lados marcados com um e três traços (2.12), pelo que, em particular, são iguais os segmentos  $[BC]$  e  $[B'C']$ , como pretendíamos provar.

2.14

Pelo que se viu em 2.12, um triângulo tem dois ângulos iguais quando e apenas quando tem dois lados iguais, designado-se, nesse caso, por «isósceles». Terá três ângulos iguais quando e apenas quando tiver três lados iguais; os triângulos isósceles com esta propriedade suplementar designam-se por «equiláteros» (por vezes também por «equiângulos»). Um triângulo não isósceles, portanto com três lados com comprimentos dois a dois distintos e consequentemente com três ângulos de amplitudes duas a duas distintas, diz-se «escaleno».

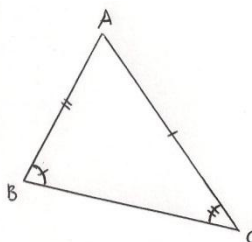
2.15

Embora não se peça para justificar estas propriedades, podemos deduzi-las considerando, num triângulo, um lado maior do que outro e, no lado maior, marcando um ponto à distância de um dos extremos igual ao comprimento do outro, obtendo-se a seguinte construção:



Neste caso temos  $\overline{AB}$  maior do que  $\overline{AC}$  e considera-se em  $[AB]$  o ponto  $D$  de modo que  $[AD]$  seja igual a  $[AC]$ . Basta agora notar que, por construção, o ângulo  $ACB$  é maior do que o ângulo  $ACD$ , e portanto do que o ângulo  $ADC$  ( $ADC$  e  $ACD$  são iguais por “*pons asinorum*”, 2.12); este por sua vez é maior do que  $ABC$  por ser ângulo externo de um triângulo ( $[BCD]$ ) do qual  $ABC$  é um ângulo interno não adjacente (2.5). Assim, de facto, o ângulo  $ACB$  oposto ao lado maior é maior do que o ângulo  $ABC$  oposto ao lado menor.

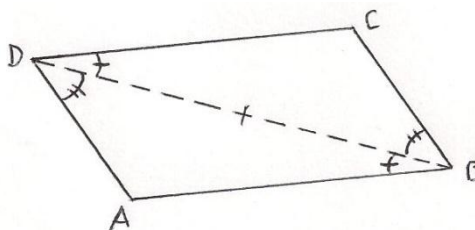
Reciprocamente, dados dois ângulos internos de um triângulo, um deles maior do que o outro, consideremos os lados opostos a estes ângulos, como se assinala na seguinte figura em que o ângulo interno em  $B$  é maior do que o ângulo interno em  $C$ :



Se o lado  $[AC]$  fosse menor do que o lado  $[AB]$ , então, pelo que acabámos de ver, o ângulo em  $B$  seria menor do que o ângulo em  $C$ , contra a hipótese, e se o lado  $[AC]$  fosse igual ao lado  $[AB]$ , então, por “*pons asinorum*” (2.12), esses ângulos seriam iguais, também contra a hipótese. Resta então apenas a hipótese de ser o lado  $[AC]$  maior do que o lado  $[AB]$ , como pretendíamos demonstrar.

2.16

Para concluir a igualdade dos lados opostos de um paralelogramo basta considerar os dois triângulos em que fica dividido por uma diagonal:



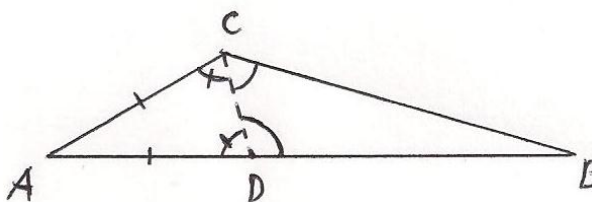
A igualdade dos pares de ângulos alternos internos assinalados (1.13) e o lado

comum  $[BD]$  garante que os triângulos  $[ABD]$  e  $[BCD]$  são iguais, pelo critério ALA (2.11), e portanto são iguais os lados  $[AD]$  e  $[BC]$ , bem como os lados  $[AB]$  e  $[CD]$ , por se oporem a ângulos iguais em triângulos iguais (2.13).

Embora não seja requerido, é fácil demonstrar a recíproca desta propriedade, ou seja, que se um quadrilátero tem os lados opostos iguais (supondo que não há dois lados que se intersectam fora dos vértices) então é um paralelogramo. Com efeito, admitidas essas hipóteses, os dois triângulos assinalados na figura acima serão iguais, agora pelo critério LLL (2.9); então serão iguais os ângulos assinalados com o mesmo número de traços, por se oporem a lados iguais em triângulos iguais (2.13). Uma vez que se trata de pares de ângulos alternos internos determinados respetivamente nos pares de retas  $AB, DC$  e  $AD, BC$  pela reta  $BD$ , cada um desses pares de retas é constituído por paralelas (1.13).

2.17

Embora não se pretenda qualquer justificação para a *desigualdade triangular*, podemos demonstrá-la examinando o único caso em que a medida do comprimento de um dos lados poderia ser maior ou igual à soma das medidas dos outros, nomeadamente quando esse lado é maior do que qualquer um dos outros dois. Nesse caso podemos marcar nesse lado um ponto à distância de um dos extremos igual ao comprimento de um dos outros dois lados, obtendo-se a seguinte construção:



Aqui, o lado  $[AB]$  é maior do que os lados  $[AC]$  e  $[BC]$  e o ponto  $D$  foi determinado de maneira que  $[AD]$  e  $[AC]$  têm o mesmo comprimento, como se assinala. São portanto iguais os ângulos assinalados com um traço (2.12 – *pons asinorum*). Agora podemos utilizar um dos resultados de 2.15 para concluir que  $[BC]$  é maior do que  $[DB]$ ; basta comparar as amplitudes dos ângulos opostos a estes lados do triângulo  $[BCD]$ . Ora o ângulo em  $BDC$  é forçosamente obtuso, já que é adjacente a um dos dois ângulos iguais do triângulo  $[ACD]$ , os quais, precisamente por serem iguais, só podem ser agudos (não podem existir dois ângulos retos ou obtusos num triângulo); sendo assim tem certamente maior amplitude do que qualquer dos outros dois ângulos internos de  $[BCD]$ , já que estes só podem ser agudos. Em particular o ângulo  $BDC$  tem maior amplitude do que o ângulo  $BCD$  e portanto, como pretendíamos demonstrar, o lado  $[BC]$  é, de facto, maior do que o lado  $[DB]$ . Desta desigualdade resulta, evidentemente, que somando a medida do comprimento de  $[BC]$  com a medida do comprimento de  $[AC]$  se obtém um valor superior à medida do comprimento de  $[AB]$  que pode ser dada pela soma da medida de comprimento de um segmento igual a  $[AC]$  ( $[AD]$ ) com a medida de comprimento de um segmento menor do que  $[BC]$  ( $[DB]$ ).

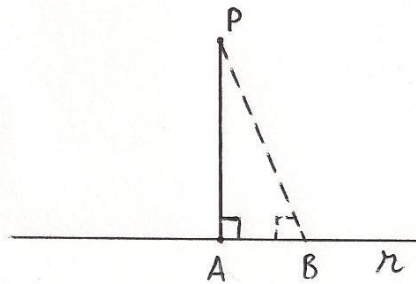
Uma vez que concluímos que  $[BC]$  é maior do que  $[BD]$ , cuja medida de comprimento é igual à diferença entre as medidas dos comprimentos dos lados  $[AB]$  e  $[AC]$ , ficamos a saber que “o lado  $[BC]$  é maior do que a diferença dos lados  $[AB]$  e  $[AC]$ ”. Como na construção efetuada poderíamos ter invertido os papéis de  $[BC]$  e  $[AC]$ , fica assim provado que “qualquer lado é maior do que a diferença dos

outros dois” (o caso do lado maior  $[AB]$  é evidentemente trivial...).

**Observação:** Prova-se que duas circunferências num plano, cuja soma dos raios seja maior do que a distância entre os centros e tais que o valor absoluto da diferença entre os raios seja menor do que a distância entre os centros, se intersectam exatamente em dois pontos desse plano; trata-se de uma condição necessária para que as circunferências possam intersectar-se, já que um ponto de interseção e os dois centros determinam um triângulo cujos lados têm medidas de comprimento exatamente iguais aos raios das circunferências e à medida da distância entre os centros. Assim, essa condição é também suficiente, pelo que triângulos com lados de medidas de comprimento com essas propriedades podem ser sempre construídos utilizando interseções de circunferências, como foi sugerido no texto de apoio ao descritor 2.9.

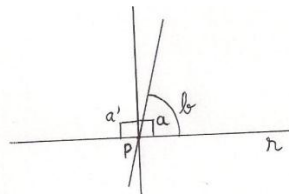
2.18  
2.19

Não justificaremos a partir de propriedades já conhecidas a existência da perpendicular traçada de um ponto para uma reta ou da perpendicular a uma reta, em determinado plano contendo a reta, passando por um ponto desta, embora se venha a indicar uma maneira de as construir utilizando régua e compasso. Neste descritor pede-se apenas para utilizar um esquadro e uma régua para, na prática, representar estas perpendiculares. Podemos, no entanto, facilmente reconhecer que é única qualquer reta com uma destas propriedades de perpendicularidade; comecemos com o caso da perpendicular traçada de um ponto exterior à reta:

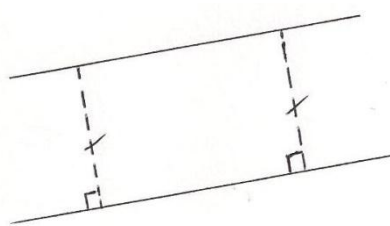


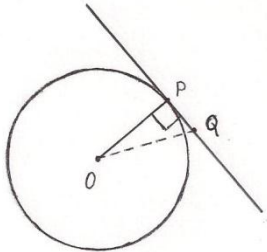
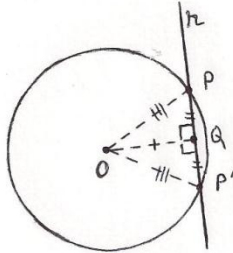
Supondo que existia outra perpendicular a  $r$  passando pelo ponto  $P$ , existiria um triângulo  $[PAB]$  para o qual dois dos ângulos internos são retos, o que sabemos ser impossível (2.3).

Considerando agora uma perpendicular a  $r$  passando por um ponto  $P$  de  $r$ , e uma qualquer outra reta passando por  $P$  no mesmo plano teríamos:

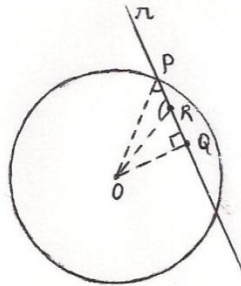


Da própria figura se conclui que o ângulo  $b$  não é igual ao ângulo reto  $a$ , pelo que não há outra reta perpendicular a  $r$  passando por  $P$ . Se não quiséssemos invocar o facto intuitivo de todos os ângulos retos serem iguais (trata-se de um dos postulados de Euclides...) poderíamos concluir ainda que o ângulo  $b$  não poderia ser reto já que é menor do que o ângulo  $a$  ao passo que o respetivo suplementar adjacente que contém  $a'$  é maior do que  $a'$ , sendo  $a$  e  $a'$  iguais por serem suplementares e retos (por definição um ângulo é reto se for igual a um seu suplementar). Assim  $b$  não poderia ser reto por não ser igual a um seu suplementar.

2.20	<p>Para concluir que a distância de um ponto ao pé da perpendicular traçada do ponto para uma reta que por ele não passa é menor do que a distância do ponto a qualquer outro ponto da reta, basta invocar o facto de que os três pontos referidos determinam um triângulo retângulo, no qual, portanto, o lado oposto ao ângulo reto (hipotenusa) é forçosamente maior do que o lado oposto a qualquer outro dos ângulos (cateto), que têm de ser menores do que o ângulo reto (2.15 e 2.3).</p>
2.22	<p>Neste descritor basta reconhecer que dois segmentos perpendiculares às retas paralelas e unindo dois pontos, um em cada reta têm de ser paralelos entre si, pelo critério de paralelismo envolvendo ângulos correspondentes (1.11); em seguida basta invocar a igualdade dos lados opostos de um paralelogramo (2.16) para concluir que todos esses segmentos são iguais. A seguinte figura resume estes argumentos:</p> 

Descritor	Texto de apoio
1.4	<p>Uma reta passando por um ponto <math>P</math> de uma circunferência e perpendicular ao raio com extremo nesse ponto tem os restantes pontos a uma distância do centro superior ao raio da circunferência; com efeito, o centro <math>O</math>, o ponto <math>P</math> e outro qualquer ponto <math>Q</math> da reta são vértices de um triângulo retângulo em <math>P</math> cuja hipotenusa é o segmento <math>[OQ]</math>, maior do que qualquer dos catetos, já que se opõe ao maior dos ângulos do triângulo (o ângulo reto – cf. GM5-2.3, 2.13). Em particular, a distância de <math>Q</math> ao centro <math>O</math> é maior do que a distância de <math>P</math> a <math>O</math>, ou seja, é maior do que o raio. Portanto o ponto <math>Q</math> está na parte externa da circunferência (no exterior do círculo), ou seja, a reta apenas intersesta a circunferência (e o círculo) no ponto <math>P</math>:</p>  <p>Esta propriedade da reta <math>PQ</math> leva-nos a designá-la por <i>reta tangente à circunferência no ponto <math>P</math></i>. Pode portanto ser construída traçando a perpendicular a <math>OP</math> no ponto <math>P</math>, no plano da circunferência.</p> <p><b>Observação:</b> Podemos também notar que, considerando qualquer outra reta <math>r</math> do plano passando por <math>P</math>, uma vez que não pode ser perpendicular ao raio (GM5-2.19), será distinto de <math>P</math> o ponto <math>Q</math>, pé da perpendicular traçada de <math>O</math> para <math>r</math>. Agora, se considerarmos o ponto <math>P'</math> da reta <math>r</math> à mesma distância de <math>Q</math> que <math>P</math> mas na semirreta oposta de origem <math>Q</math>, facilmente se conclui que são iguais os triângulos retângulos <math>[OQP]</math> e <math>[OQP']</math> (critério LAL – os triângulos têm iguais os lados assinalados respetivamente com um e dois traços e os ângulos retos) e portanto também as hipotenusas <math>[OP]</math> e <math>[OP']</math> (opõem-se aos ângulos retos em triângulos retângulos iguais):</p>  <p>Daqui resulta que o ponto <math>P'</math> também está na circunferência, por estar à mesma distância do centro que o ponto <math>P</math>; ou seja, qualquer reta do plano da circunferência passando por <math>P</math> e distinta da tangente intersesta a circunferência num segundo ponto; por outras palavras, a tangente à circunferência em <math>P</math> é a única reta do plano passando por <math>P</math> que intersesta a circunferência (e o círculo) num único ponto.</p> <p>Ainda se pode concluir que os pontos situados na reta <math>r</math> entre <math>P</math> e <math>P'</math> estão na parte interna da circunferência (no interior do círculo); considerando, por exemplo, um</p>

desse pontos, seja  $R$ , situado entre  $P$  e  $Q$ , conclui-se que  $[OR]$  tem comprimento menor do que o raio  $[OP]$ , pois, no triângulo  $[ORP]$ ,  $[OP]$  opõe-se a um ângulo obtuso (é ângulo externo não adjacente ao ângulo reto do triângulo  $[OQR]$ ) ao passo que  $[OR]$  opõe-se a outro ângulo interno, o qual só pode ser agudo:

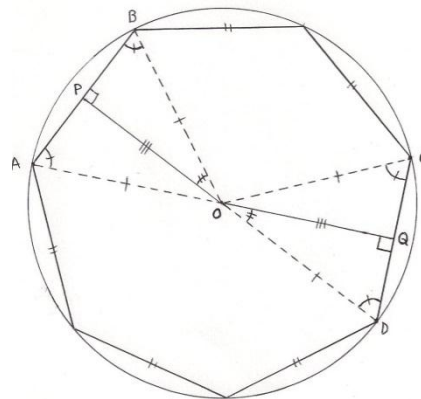


O mesmo argumento valeria para um ponto situado entre  $Q$  e  $P'$  e para o próprio ponto  $Q$ , invocando, nesse caso, o facto de  $[OP]$  ser a hipotenusa do triângulo retângulo  $[OQP]$  (lado oposto ao ângulo reto) e portanto maior que o lado  $[OQ]$ , que é um cateto (oposto a um ângulo agudo no mesmo triângulo).

Analogamente se concluiria que os pontos da reta  $r$  fora do segmento  $[PP']$  estão no exterior do círculo; assim a reta  $r$  intersesta a circunferência exatamente em dois pontos, se não lhe for tangente e, estando situada no plano da circunferência, a intersestar num ponto («reta secante à circunferência»).

1.7

Um polígono regular tem, em particular, os lados todos iguais; se os respetivos vértices estiverem situados em determinada circunferência, ou seja, se o polígono estiver inscrito nessa circunferência, então as distâncias do centro da circunferência aos pés das perpendiculares traçadas do centro para os lados do polígono serão todas iguais, como se pode concluir argumentando como se segue, utilizando a figura:



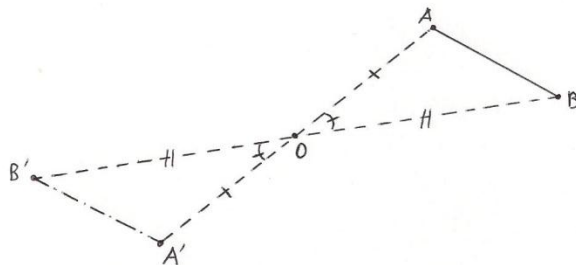
Considerando dois quaisquer lados do polígono,  $[AB]$  e  $[CD]$ , por exemplo, terão comprimentos iguais, já que o polígono é regular; por outro lado os raios da circunferência são também todos iguais, pelo que, em particular são iguais os segmentos  $[OA]$ ,  $[OB]$ ,  $[OC]$  e  $[OD]$ . Então, pelo critério LLL de igualdade de triângulos, são iguais os triângulos  $[OAB]$  e  $[OCD]$ , pelo que serão também iguais os ângulos  $OAB$ ,  $OBA$ ,  $OCD$  e  $ODC$  por se oporem a lados iguais, os dois primeiros e os dois últimos nos mesmos triângulos (cf. GM5-2.12) e o segundo e o terceiro (por exemplo) em triângulos iguais (cf. GM5-2.13). Agora podemos aplicar o critério ALA (cf. GM5-2.11) aos triângulos  $[OPB]$  e  $[OQD]$  (por exemplo), já que têm iguais os lados  $[OB]$  e  $[OD]$  (raios da circunferência) e os respetivos ângulos adjacentes:  $OBP$

é igual a  $ODQ$  e  $BOP$  é igual a  $DOQ$ , já que estes dois ângulos são complementares dos anteriores por ser reto o terceiro ângulo interno de cada um dos triângulos e a soma dos três ser igual a dois retos (GM5-2.2). Da igualdade dos triângulos  $[OPB]$  e  $[OQD]$  deduzimos finalmente a igualdade dos lados  $[OP]$  e  $[OQ]$ , que se opõem a ângulos iguais em triângulos iguais (GM5-2.13); trata-se de dois quaisquer dos «apótemas» do polígono, pelo que acabámos de verificar que todos os apótemas são iguais.

**Observação:** A igualdade dos apótemas poderia ser justificada admitindo propriedades básicas da medida de área; com efeito os triângulos iguais  $[OAB]$  e  $[OCD]$  têm áreas iguais (por serem iguais, pelo critério LLL, com acima se referiu) e sabemos que a medida da área de um triângulo em unidades quadradas é igual a metade do produto da medida de comprimento de uma base pela medida de comprimento da altura correspondente, na unidade pré-fixada (GM5-4.6). Tomando para bases dos triângulos os lados do polígono, as alturas correspondentes são precisamente os apótemas, pelo que da igualdade das medidas de área e dos comprimentos das bases dos triângulos deduz-se imediatamente as igualdades das medidas de comprimento dos apótemas. A dedução anterior evita o recurso a propriedades da área, cuja justificação rigorosa é mais complexa, embora sejam muito intuitivas.

9.2

As reflexões centrais de centro  $O$  transformam um ponto  $P$  distinto de  $O$  no ponto  $P'$  da semirreta oposta a  $\hat{O}P$  à mesma distância de  $O$  que  $P$ . São «isometrias», no sentido em que mantêm as distâncias entre os pontos; a seguinte construção permite reconhecer esse facto, no caso em que os pontos  $A$  e  $B$  não são colineares com  $O$ :

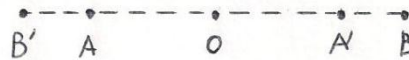


Os pontos  $A$  e  $B$  são transformados pela reflexão central de centro  $O$  respetivamente nos pontos  $A'$  e  $B'$ ; Ora facilmente se conclui que os triângulos  $[OAB]$  e  $[OA'B']$  são iguais; basta utilizar o critério LAL, uma vez que os ângulos internos em  $O$  dos dois triângulos são verticalmente opostos e portanto iguais (por definição de simetria central,  $O$  está nos segmentos  $[AA']$  e  $[BB']$ ) e, também por definição de simetria central,  $[OA]$  e  $[OA']$  são iguais, assim como  $[OB]$  e  $[OB']$ . Consequentemente,  $[AB]$  e  $[A'B']$  também são iguais, por se oporem a ângulos iguais em triângulos iguais.

Se a reta determinada pelos pontos  $A$  e  $B$  passar pelo ponto  $O$ , centro da reflexão, também passará pelos pontos  $A'$  e  $B'$  (já que as semirretas opostas a  $\hat{O}A$  e  $\hat{O}B$  estão evidentemente contidas na única reta que contém os três pontos  $A, B$  e  $O$ ) e, examinando os diversos casos possíveis das posições relativas dos pontos  $A$  e  $B$  e  $O$ , é fácil concluir a igualdade dos comprimentos de  $[AB]$  e  $[A'B']$ , utilizando princípios básicos, que temos admitido implicitamente, relativos a comprimentos de segmentos justapostos. Tais princípios estão na base, em particular, da definição geométrica de soma de números racionais, pois deles depende a coerência desta



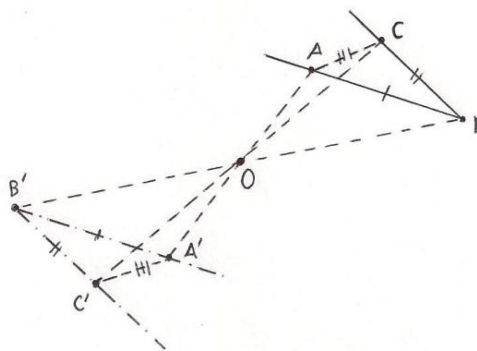
definição; examinemos, por exemplo, o caso em que o ponto  $O$  está no segmento  $[AB]$ , sendo distinto dos respectivos extremos e ponto médio. A situação será a seguinte:



Da definição de reflexão resulta que  $[OA]$  e  $[OA']$  são iguais, assim como  $[OB]$  e  $[OB']$ ; resulta então dos referidos princípios que também serão iguais os comprimentos de  $[B'A]$  e  $[A'B]$  (“diferenças” de pares de segmentos respetivamente iguais) e em seguida os comprimentos de  $[AB]$  e  $[A'B']$ , já que estes segmentos são formados pela justaposição do segmento  $[AA']$  respetivamente com os segmentos iguais  $[A'B]$  e  $[B'A]$ . Note-se que a demonstração acima, utilizando o critério LAL de igualdade de triângulos, mas agora invocando diretamente a igualdade dos terceiros lados, continua praticamente a valer, se admitirmos que se aplica a “triângulos degenerados”, ou seja, determinados por trios de pontos colineares, o que resultará de axiomas básicos da Geometria indispensáveis para a introdução coerente das operações de medida de comprimentos e amplitudes de ângulos, axiomas que fundamentam o critério geral de igualdade de ângulos e respetivas condições de coerência (cf. a observação a propósito de 9.21). Neste caso os “ângulos iguais” para se poder aplicar o critério LAL seriam os ângulos rasos  $AOB$  e  $A'OB'$ , deduzindo-se a igualdade dos “terceiros lados”  $[AB]$  e  $[A'B']$  dos triângulos degenerados  $[AOB]$  e  $[A'OB']$ .

9.3

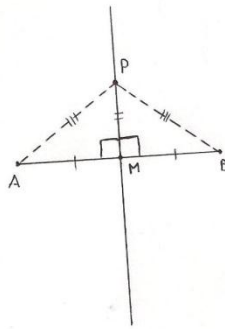
Dado que uma isometria se caracteriza por preservar as distâncias entre pontos, pelo critério de igualdade de ângulos, que recorre às distâncias mútuas entre três pontos em cada ângulo (o vértice e um ponto distinto do vértice em cada lado do ângulo), serão necessariamente iguais as amplitudes de dois ângulos se o primeiro for determinado por três dados pontos e o segundo pelos pontos transformados destes por essa isometria (desde que o vértice do segundo ângulo seja o transformado do vértice do primeiro); na seguinte figura exemplifica-se esta propriedade com uma reflexão central:



Os pontos  $A, B$  e  $C$  são transformados respetivamente nos pontos,  $A', B'$  e  $C'$  pela simetria central de centro  $O$  e as igualdades dos segmentos assinalados respetivamente com um, dois e três traços garantem a igualdade das amplitudes dos ângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$ .

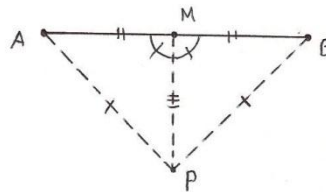
9.4  
9.5  
9.6  
9.7

A mediatriz de um segmento, reta perpendicular a esse segmento no respetivo ponto médio (em determinado plano contendo o segmento) é única (cf. GM5-2.19) sendo constituída por pontos equidistantes dos extremos do segmento como pode verificar-se argumentando como se segue, utilizando a figura:



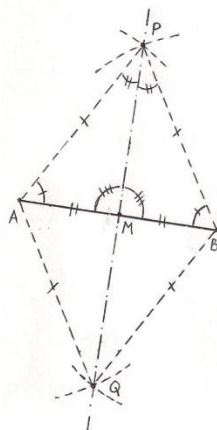
A reta  $PM$ , mediatriz do segmento  $[AB]$ , por definição, é perpendicular ao segmento  $[AB]$  no respetivo ponto médio, pelo que os ângulos assinalados são retos e os segmentos  $[AM]$  e  $[MB]$  são iguais; então, pelo critério LAL, os triângulos  $[AMP]$  e  $[BMP]$  também são iguais (já que o lado  $[MP]$  é comum aos dois triângulos), pelo que também são iguais os segmentos  $[PA]$  e  $[PB]$ , ou, seja, o ponto  $P$  é equidistante dos extremos do segmento  $[AB]$ .

Reciprocamente, qualquer ponto do plano equidistante de  $A$  e  $B$  está na mediatriz, como pode concluir-se da seguinte figura:



Supondo que o ponto  $P$  é equidistante de  $A$  e  $B$  e traçando o segmento de reta que une  $P$  ao ponto médio  $M$  do segmento  $[AB]$ , podemos aplicar o critério LLL para concluir que são iguais os triângulos  $[AMP]$  e  $[BMP]$  e portanto também os ângulos  $AMP$  e  $BMP$ , por se oporem a lados iguais em triângulos iguais; mas tratando-se de ângulos suplementares iguais concluímos que são retos e portanto a reta  $MP$  é, de facto, a mediatriz do segmento  $[AB]$ .

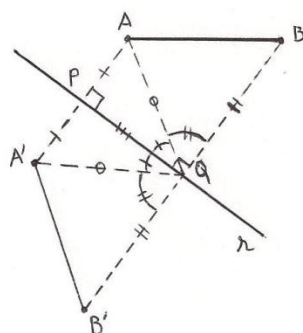
Identificada a mediatriz com o conjunto dos pontos do plano equidistantes de  $A$  e  $B$ , podemos agora, facilmente, construí-la com régua e compasso, bastando, para o efeito, intersecar duas circunferências com o mesmo raio (podemos tomar os raios iguais ao comprimento do próprio segmento  $[AB]$ ) e de centros respetivamente em  $A$  e  $B$  (com a escolha sugerida dos raios tais circunferências intersecam-se em dois pontos  $P$  e  $Q$ , já que a soma dos raios é superior à distância entre os respetivos centros e a diferença é nula, portanto inferior à distância entre os centros, o que garante a existência dos triângulos  $[ABP]$  e  $[ABQ]$ , como foi referido na observação do texto de apoio ao descritor GM5-2.17). Obtêm-se assim dois pontos da mediatriz (um em cada um dos semiplanos determinados pela reta suporte de  $[AB]$  no plano fixado), já que, por construção, ficam equidistantes de  $A$  e  $B$ :



Na figura indicam-se as linhas auxiliares da construção e as que permitem concluir que a reta  $PQ$  assim construída é de facto a mediatriz do segmento  $[AB]$ , agora sem invocar as propriedades acima justificadas, em particular sem se utilizar à partida o ponto médio do segmento  $[AB]$ . Com efeito, a construção efetuada garante que são iguais os quatro segmentos marcados com um traço (raios das duas circunferências) e, em particular, os ângulos marcados com um traço (opostos a lados iguais num mesmo triângulo – *pons asinorum*); assim, pelo critério LLL são iguais os triângulos isósceles  $[APQ]$  e  $[BPQ]$  e portanto também os ângulos marcados com dois traços (opostos a lados iguais nestes dois triângulos iguais). Então, pelo critério ALA (utilizando os lados  $[AP]$  e  $[BP]$  e os respetivos ângulos adjacentes), concluímos que são iguais os triângulos  $[APM]$  e  $[BPM]$ , o que garante a igualdade respetivamente dos segmentos marcados com dois traços e dos ângulos marcados com três traços. Ou seja,  $M$  é, de facto, o ponto médio do segmento  $[AB]$  e os ângulos  $AMP$  e  $BMP$  são retos (iguais e suplementares), o que significa que a reta  $PQ$  é a mediatriz do segmento  $[AB]$  no plano considerado.

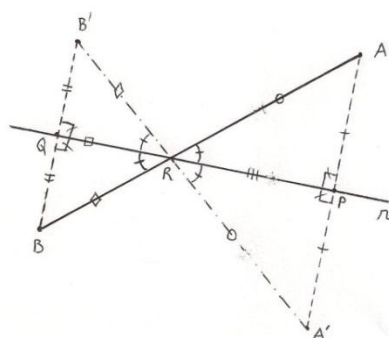
Note-se que esta construção também permite obter o ponto médio  $M$  do segmento  $[AB]$ , uma vez que esse ponto não foi utilizado para obter a mediatriz, mas resultou antes da interseção dessa reta com o segmento  $[AB]$ .

9.8 A imagem de um ponto  $P$  por uma reflexão de eixo  $r$  ( $r$  uma reta dada) que não  
 9.9 passa pelo ponto obtém-se traçando a perpendicular do ponto para  $r$  e tomando  
 9.10 nessa perpendicular, no semiplano oposto a  $P$  determinado por  $r$ , um ponto à  
 9.11 mesma distância que  $P$  do pé da perpendicular. Indicam-se na figura as imagens, respetivamente  $A'$  e  $B'$ , de dois pontos,  $A$  e  $B$  por uma reflexão de eixo  $r$ , no caso em que os dois pontos pertencem a um mesmo semiplano determinado por  $r$  e não estão nessa reta; em particular, o segmento  $[AB]$  não intersesta  $r$ :



A construção indicada permite verificar que os segmentos  $[AB]$  e  $[A'B']$  são iguais. Com efeito, por definição de imagem por uma reflexão, são iguais respetivamente os segmentos marcados com um traço e os segmentos marcados com dois traços, sendo retos os ângulos como tal indicados. Pelo critério LAL concluímos que serão então iguais os triângulos  $[APQ]$  e  $[A'PQ]$  e portanto os lados  $[AQ]$  e  $[A'Q]$  (marcados com um pequeno círculo) e os ângulos marcados com um traço. Daqui resulta que são iguais os ângulos marcados com dois traços (complementares de ângulos iguais) e portanto, novamente pelo critério LAL, os triângulos  $[ABQ]$  e  $[A'B'Q]$ ; podemos então finalmente concluir que são iguais os segmentos  $[AB]$  e  $[A'B']$ , por se oporem a ângulos iguais em triângulos iguais.

No caso em que os pontos  $A$  e  $B$  pertencem a semiplanos distintos determinados por  $r$  em determinado plano contendo esta reta, em particular o segmento  $[AB]$  intersectará a reta  $r$  em determinado ponto  $R$  e a seguinte construção permite concluir, mais uma vez, que os pontos  $A$  e  $B$  estão à mesma distância que os pontos  $A'$  e  $B'$ :



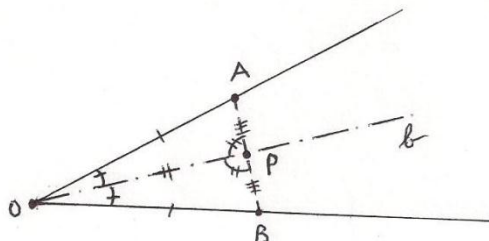
Podemos começar por verificar que são iguais os triângulos  $[APR]$  e  $[A'PR]$ , utilizando o critério LAL (são iguais os ângulos retos, os lados  $[AP]$  e  $[A'P]$  e o lado  $[PR]$  é comum) e portanto os ângulos marcados com um traço nestes dois triângulos. De modo análogo são iguais os ângulos marcados com um traço nos triângulos  $[BQR]$  e  $[B'QR]$  e são iguais os ângulos  $QRB$  e  $ARP$  por serem verticalmente opostos. Mas então são iguais dois a dois todos os ângulos marcados com um traço, e, em particular, os ângulos  $A'RP$  e  $B'RQ$ ; como os lados  $\dot{R}Q$  e  $\dot{R}P$  são colineares, também terão de o ser os lados  $\dot{R}B'$  e  $\dot{R}A'$ , pois podemos considerar o ângulo verticalmente oposto a um dos ângulos considerados (seja  $B'RQ$ ) que será então forçosamente igual a  $A'RP$  com um lado comum com este ângulo ( $\dot{R}P$ ), no mesmo semiplano, tendo portanto de coincidir com ele, o que prova a referida colinearidade de  $\dot{R}B'$  e  $\dot{R}A'$  (também poderíamos concluir esta colinearidade de  $B'RP$  ser um ângulo suplementar de  $B'RQ$  e portanto do ângulo  $A'RP$ , igual a  $B'RQ$ , o que prova que  $B'RA'$  é um ângulo raso). Então a distância entre  $A'$  e  $B'$  será, de facto, igual à distância entre  $A$  e  $B$ , por serem iguais os comprimentos de  $[AR]$  e  $[A'R]$  e também os comprimentos de  $[RB]$  e  $[RB']$  (opõem-se a ângulos iguais em triângulos iguais) e por  $R$  estar situado tanto no segmento  $[AB]$  como no segmento  $[A'B']$ , atendendo ao que acabámos de ver.

De modo análogo (mas mais simplesmente) poderíamos tratar o caso em que pelo menos um dos pontos se situa na reta  $r$ .

Do que precede conclui-se que as reflexões são também isometrias do plano (preservam as distâncias entre os pontos) e pelo que se disse acima a propósito das simetrias centrais, também preservam as amplitudes dos ângulos.

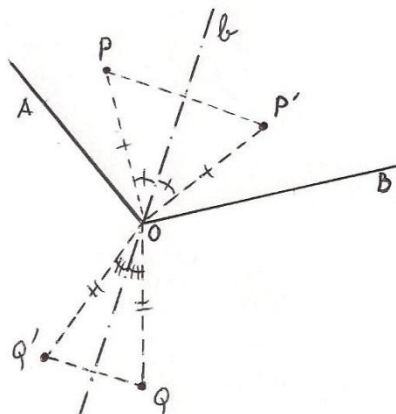
9.12

Consideremos a bissetriz  $b$  de um dado ângulo convexo  $AOB$ , semirreta situada entre os lados do ângulo e determinando, com estes, ângulos convexos iguais (neste caso os ângulos marcados com um traço):



Tomando os pontos  $A$  e  $B$  a igual distância do vértice e sendo  $P$  a interseção do segmento  $[AB]$  com a semirreta  $b$ , o critério LAL permite imediatamente concluir que os triângulos  $[AOP]$  e  $[BOP]$  são iguais e portanto também os segmentos de reta marcados com três traços e os ângulos marcados com dois traços; estes ângulos, sendo iguais e suplementares, são portanto retos, o que, juntamente com a igualdade dos segmentos  $[AP]$  e  $[BP]$ , permite concluir que  $A$  e  $B$  são imagens um do outro pela reflexão de eixo igual à reta suporte da bissetriz  $b$ .

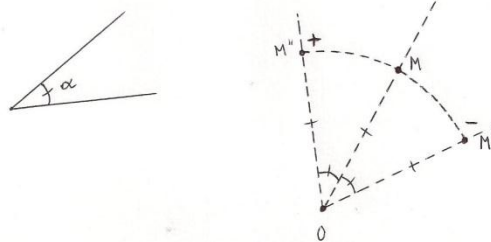
Que a reta suporte da bissetriz de um ângulo convexo é, de facto, eixo de simetria desse ângulo e do ângulo côncavo associado, pode deduzir-se dos argumentos abaixo, que utilizam a seguinte figura:



É fácil concluir que a imagem de um ponto  $P$  de qualquer um dos ângulos pela reflexão de eixo igual à reta suporte da bissetriz  $b$  pode ser obtida marcando no semiplano oposto determinado por essa reta um ponto à mesma distância do vértice  $O$ , e “à mesma distância angular” da bissetriz, ou seja, situado no lado não comum do ângulo adjacente de igual amplitude àquele que tem um dos lados igual à bissetriz e outro igual à semirreta  $OP$ . Uma construção análoga à anterior permite mostrar que, de facto, os pontos  $P'$  e  $Q'$  indicados na figura e construídos do modo indicado, respetivamente no ângulo convexo e no côncavo associado, são imagens respetivamente dos pontos  $P$  e  $Q$  fixados nesses ângulos pela reflexão de eixo igual à reta suporte de  $b$ . Assim se conclui que as imagens dos pontos de qualquer um destes dois ângulos por esta reflexão reconstituem o próprio ângulo.

9.13  
9.14  
9.15  
9.16  
9.17  
9.18  
9.19

Dado um ângulo  $\alpha$  não nulo, nem giro nem raso e um ponto  $O$  em determinado plano, qualquer ponto  $M$  desse plano distinto de  $O$  determina com  $O$  uma semirreta de origem  $O$  contida nesse plano, a qual pode ser tomada para lado de um ângulo de amplitude igual a  $\alpha$  em cada um dos semiplanos em que o plano fica dividido pela reta  $OM$ . Cada um desses ângulos fica unicamente determinado, bastando, para tal, transportar o ângulo  $\alpha$  para o respectivo semiplano de modo que um dos lados coincida com a semirreta  $\hat{O}M$ :



Se agora marcarmos em cada um dos lados distintos desses dois ângulos pontos à distância do vértice  $O$  igual ao comprimento do segmento  $[OM]$ , obteremos as duas únicas imagens,  $M'$  e  $M''$  de  $M$  por rotações de centro  $O$  e ângulo  $\alpha$  nesse plano.

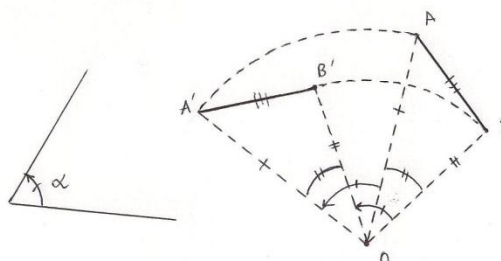
Se o ângulo  $\alpha$  for nulo ou giro, por definição, para que  $MOM'$  tenha amplitude igual a  $\alpha$ , as semirretas  $\hat{O}M$  e  $\hat{O}M'$  terão de coincidir e portanto, para que os segmentos de reta  $[OM]$  e  $[OM']$  tenham o mesmo comprimento, terá de ser  $M$  coincidente com  $M'$ ; nesses casos, portanto, a imagem de  $M$  por uma rotação de qualquer centro distinto de  $M$  e ângulo  $\alpha$  será o próprio ponto  $M$ .

Se  $\alpha$  for raso, também por definição, os pontos  $M$  e  $M'$  estarão em semirretas opostas de origem  $O$  à mesma distância de  $O$ , já que os lados de um ângulo raso, precisamente, são semirretas opostas; neste caso haverá uma única imagem de  $M$  por rotação de determinado centro  $O$  distinto de  $M$  e ângulo  $\alpha$ , a qual coincide com a imagem de  $M$  pela reflexão central de centro  $O$ .

Podemos distinguir as duas imagens de  $M$  por rotações com o mesmo centro e ângulo num mesmo plano, intuitivamente, imaginando que são obtidas pela “rotação, no plano, ao longo de um intervalo de tempo” de um segmento de reta com “posição inicial” igual ao segmento  $[OM]$  e posição final igual ao segmento  $[OM']$  (ou alternativamente igual a  $[OM'']$ ), passando por posições intermédias cujos extremos descrevem, em alternativa, os arcos de circunferência indicados a tracejado na figura anterior. Comparando o “movimento do segmento de reta” com o movimento de um ponteiro de um relógio, uma das rotações (dita de *sentido positivo* ou *direto*) será “efetuada” no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio (na figura, a que conduz a  $M''$ ) e a outra (dita de *sentido negativo* ou *retrógrado*) no sentido dos ponteiros do relógio (a que, na figura, conduz a  $M'$ ).

Note-se que os ângulos  $MOM'$  e  $MOM''$ , correspondentes às rotações de *sentidos contrários*, partilham um lado e são adjacentes; este critério permite distinguir “ângulos orientados” de sentidos contrários, no caso em que, num plano, partilham o “lado origem”. São considerações deste tipo que permitem formalizar adequadamente a noção de orientação de ângulos (orientados) num plano, em alternativa à abordagem intuitiva que agora seguimos, utilizando o “movimento dos ponteiros de um relógio”.

Podemos agora examinar o efeito das rotações nos comprimentos dos segmentos. Na figura seguinte representam-se as imagens de dois pontos  $A$  e  $B$  por uma rotação de centro num ponto  $O$  e ângulo um dado  $\alpha$  (não nulo nem giro) em determinado plano contendo  $O, A$  e  $B$  tendo-se o cuidado de escolher rotações *com o mesmo sentido* (neste caso o sentido positivo ou direto, ou seja, contrário ao dos ponteiros do relógio):



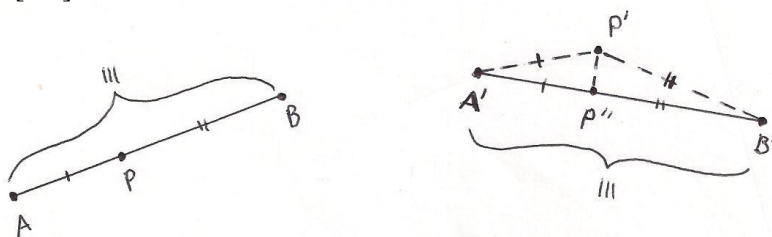
Esta igualdade de sentido das rotações aplicadas aos dois pontos  $A$  e  $B$  pode traduzir-se na “igualdade de sentido” dos “ângulos orientados” de “lados origem”  $\hat{O}A$  e  $\hat{O}B$  e “lados extremidade” respetivamente  $\hat{O}A'$  e  $\hat{O}B'$ . Essa igualdade de sentido, por sua vez, pode aferir-se, de forma mais rigorosa (sem se utilizar o sentido dos ponteiros de um relógio...), passando por “igualdades de sentido” de ângulos orientados que com estes partilhem um dos lados; assim podemos começar por considerar o ângulo convexo de lado origem  $\hat{O}A$  e lado extremidade  $\hat{O}B'$ , o qual partilha um lado com o ângulo  $\hat{O}A'$ , não sendo adjacente, já que está nele contido, e portanto terá o mesmo sentido que o ângulo orientado que corresponde à rotação que transforma  $A$  em  $A'$ . Agora podemos notar que o mesmo ângulo orientado tem o lado extremidade coincidente com o lado extremidade do ângulo orientado correspondente à rotação que transforma o ponto  $B$  no ponto  $B'$ , não sendo esses ângulos adjacentes, pelo que, mais uma vez podemos assim aferir a igualdade de sentido. A conclusão é que os ângulos orientados utilizados para obter  $A'$  e  $B'$  respetivamente a partir de  $A$  e  $B$  têm, de facto, o mesmo sentido, atendendo ao modo como foram construídos.

Esta análise permite concluir que a situação geométrica do ângulo  $\hat{A}OB'$  é tal que fica adjacente aos ângulos  $\hat{A}OB$  e  $\hat{A}'OB'$ , formando com cada um deles somas iguais (de amplitudes iguais a  $\alpha$ ). Daqui se deduz que os ângulos marcados na figura com dois traços também são iguais, o que permite aplicar o critério LAL aos triângulos  $\triangle AOB$  e  $\triangle A'OB'$  e concluir que são iguais, bem como, em consequência, os segmentos  $[AB]$  e  $[A'B']$ .

Do que precede conclui-se que também são isometrias as rotações de determinado centro, ângulo e sentido, num dado plano; em consequência, e atendendo ao que se viu a propósito das simetrias centrais, também manterão as amplitudes dos ângulos.

**9.21** Uma isometria caracteriza-se por manter as distâncias entre os pontos; ou seja, se  $A'$  e  $B'$  forem, respetivamente, as imagens de  $A$  e  $B$  por uma dada isometria então a distância entre  $A'$  e  $B'$  é igual à distância entre  $A$  e  $B$ , ou seja, os segmentos de reta  $[AB]$  e  $[A'B']$  são iguais. Mas podemos, além disso, afirmar que os pontos de  $[A'B']$  são exatamente as imagens dos pontos de  $[AB]$  por essa isometria; com efeito, prova-se que as isometrias, pelo facto de “manterem as distâncias entre os pontos” também “preservam os alinhamentos”.

**Observação\*\*:** Esta propriedade pode ligar-se a uma extensão natural do critério de igualdade de ângulos; examinemos a figura abaixo em que se representam as imagens  $A'$ ,  $P'$  e  $B'$ , por uma isometria, de três pontos alinhados  $A$ ,  $P$  e  $B$  ( $P$  no segmento  $[AB]$ ):



Pretendemos provar que o ponto  $P'$  está no segmento  $[A'B']$ , ou, mais precisamente, que coincide com o ponto  $P''$  desse segmento, assinalado na figura, a uma distância de  $A'$  igual à distância de  $A$  a  $P$  (e portanto a uma distância de  $B'$  igual à distância de  $B$  a  $P$ ). Ora as distâncias assinaladas com o mesmo número de traços serão iguais, por definição de isometria e por construção de  $P''$ , o que, em particular, pelo critério de igualdade de ângulos (estendido ao caso em que um dos ângulos é nulo) daria que o ângulo  $P'A'B'$  é igual ao ângulo nulo  $PAB$  (são iguais dois a dois os segmentos  $[P'A']$  e  $[PA]$ ,  $[A'B']$  e  $[AB]$ ,  $[P'B']$  e  $[PB]$ ). Mas agora “o recíproco” do mesmo critério (mais uma vez estendido ao caso em que um dos ângulos é nulo) permitiria concluir, da igualdade desses dois ângulos, que o segmento de reta  $[P'P'']$  teria de ser igual ao “segmento de reta degenerado”  $[PP']$  o que permitira concluir que os pontos  $P'$  e  $P''$  têm de coincidir (admitindo que “um segmento de reta é degenerado se for igual a um segmento degenerado”...).

Poderíamos também ter logo concluído que  $P'$  não poderia formar um triângulo (“não degenerado”) com  $A'$  e  $B'$  invocando uma propriedade conhecida, embora menos “primitiva”. Trata-se da *desigualdade triangular* (GM5-2.17); com efeito, na figura acima, se  $P'$  não fosse colinear a  $A'$  e  $B'$ , no triângulo  $[A'B'P']$  a medida do lado  $[A'B']$  seria igual à soma das medidas dos lados  $[A'P']$  e  $[P'B']$ , o que contrariaria a desigualdade triangular. Sendo então, forçosamente,  $P'$  colinear a  $A'$  e  $B'$ , uma análise dos comprimentos dos segmentos envolvendo os pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $P'$  permitiria facilmente depois concluir que os pontos  $P'$  e  $P''$  têm de coincidir.

Podemos ainda notar, a este propósito, que a propriedade acima admitida segundo a qual a igualdade de  $[PB]$  e  $[P'B']$  resulta imediatamente das igualdades dois a dois dos pares de segmentos  $[AP]$ ,  $[A'P']$  e  $[AB]$ ,  $[A'B']$  e do facto de  $P$  estar no segmento  $[AB]$  assim como  $P'$  no segmento  $[A'B']$ , também pode ser encarada como resultando de uma extensão do critério de igualdade de ângulos agora ao caso em que ambos os ângulos são nulos. Neste caso serão iguais os ângulos  $PAB$  e  $P'A'B'$  e portanto daí resultará a igualdade pretendida dos segmentos  $[PB]$  e  $[P'B']$ .

Este tipo de resultados envolvendo distâncias de pontos alinhados, que foram admitidos como evidentes em diversas instâncias desde o 1º ciclo e são essenciais para a interpretação geométrica das operações sobre as diversas classes de números que foram sendo introduzidas, podem assim ser unificados com os resultados básicos relativos à igualdade de ângulos, envolvendo comparação de distâncias, desde que esses resultados se considerem como válidos também para ângulos nulos, giros e rasos.